

Un sueño lógico.

«Señores, no veo que el sexo del candidato sea un obstáculo para la admisión a *Privatdozent*.

Al fin y al cabo, esto no es una casa de baños.»

David Hilbert.

Propuesta para el alumnado.

Introducción.

En las Unidades Didácticas de Historia, y también de Educación Plástica y Visual, has centrado tu aprendizaje en la Belle Époque (1871-1914). Las matemáticas no fueron del todo ajenas a los efluvios del momento y muchos de los grandes representantes de la materia en estos años creyeron fervientemente en la ciencia como motor del progreso. Vamos a analizar el proceso que llevó al optimismo matemático y, al igual que la Primera Guerra Mundial fue un final traumático para este período, las matemáticas tuvieron su propio epílogo para su optimismo.

Antecedentes.

Actividad 1.- Por un lado has estudiado los diferentes conjuntos numéricos: los naturales, los enteros, los racionales y que, junto a los irracionales, forman el conjunto de números reales (¡y te faltan por conocer los números complejos!). ¿Sabrías decir "cuántos" números hay de cada tipo? Seguro que tu primera respuesta ha sido... ¡Infinitos! Pero vamos por partes:

a.1) Piensa primero en la cantidad de números pares e impares dentro de los números naturales, y en cómo la asignación $f(n)=2n$ permita "contar" los números pares.

a.2) Piensa ahora formas de "contar" ordenadamente los números enteros. Lo mismo para los racionales... aunque no te resultará sencillo. Basta con que des algunas ideas de cómo hacerlo.

a.3) Vamos ahora a pensar en los números reales. Supongamos que pudiéramos hacer una lista que permitiera contar los números en su expresión decimal...

$$1 \rightarrow 0, a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} \dots$$

$$2 \rightarrow 0, a_{21} a_{22} a_{23} a_{24} \dots$$

$$3 \rightarrow 0, a_{31} a_{32} a_{33} a_{34} \dots$$

$$4 \rightarrow 0, a_{41} a_{42} a_{43} a_{44} \dots$$

...

donde a_{ij} es la cifra decimal j -ésima del i -ésimo número de la lista.

Por ejemplo el número 0,74516 aparecería en algún puesto de esta lista, así como el $0.\hat{3}$ o el número π . Pero considera el siguiente número: coge la primera cifra decimal del primer número y cámbiala por otra diferente, la segunda cifra decimal del segundo número y también la cambias por otra diferente y así sucesivamente. ¿Puedes explicar por qué el número resultante no aparecerá nunca en la lista? ¿Qué conclusión extraes sobre la cantidad de números reales en comparación a los números naturales?

a.4) En los apartados anteriores has trabajado con la teoría de conjuntos de Cantor, desarrollada por éste y publicada en 1874. Investiga un poco más sobre los conceptos de conjunto, aplicación biyectiva y cardinalidad.

Actividad 2.- Por otro lado, de cursos anteriores conocías cómo resolver ecuaciones de primer y segundo grado y ya has comenzado una introducción a la resolución de ecuaciones polinómicas de grado superior a dos (singularmente, con la regla de Ruffini).

b.1) Es evidente que todo número racional puede ser la solución de una ecuación de primer grado. Con la fórmula de resolución de la ecuación de segundo grado, puedes intuir cómo son los números que aparecen en las soluciones. ¿Crees que cualquier número real puede ser solución de una ecuación polinómica?

b.2) Busca las relaciones de Cardano-Viète para ecuaciones polinómicas. De ellas, deduce una condición sobre las raíces racionales de un polinomio (puedes empezar pensando en el caso particular de la ecuación de segundo grado).

b.3) Investiga sobre los conceptos de números algebraicos y trascendentes, buscando ejemplos de ambos conjuntos. En particular, Hermite demostró en 1873 que el número e era trascendente (si no lo conoces, busca cómo se obtiene este número) y en 1882 Lindemann prueba que π era también trascendente.

El optimismo de finales del s. XIX

Durante la segunda mitad del s. XIX se produjeron enormes avances en matemática abstracta. Dos de estos grandes hitos son los que has vislumbrado en las sesiones anteriores: el desarrollo de una teoría axiomática de conjuntos (basada en leyes y deducciones lógicas) y por otro lado la resolución de ecuaciones polinómicas y la determinación de números algebraicos y trascendentes (que además tenían implicaciones sobre problemas de Geometría Clásica con regla y compás...). El ambiente reinante llevó a los matemáticos a augurar un glorioso s. XX para los avances en muchas disciplinas. En particular, uno de los grandes objetivos que se marcó la comunidad matemática fue el de fundamentar de un modo lógico y consistente todas las matemáticas.

Actividad 3.- Investiga sobre:

c.1) Congreso Internacional de Matemáticos (en especial, su edición de 1900).

c.2) Quién era David Hilbert, así como su lista de 23 problemas.

c.3) Lee los enunciados de los Problemas 1, 2 y 7. Trata de comprender la terminología.

La dura realidad

Hilbert y sus colegas habían pensado en que a lo largo del s. XX se demostrarían la mayoría de los problemas propuestos en el ICM de París en 1900 y que sin duda los avances supondrían un progreso enorme para la disciplina. Inicialmente así fue y muchos resultados fueron conquistados en el primer cuarto de siglo. Sin embargo, Hilbert había invertido su mayor esfuerzo en un programa de fundamentación lógica de las matemáticas basándose en la teoría de conjuntos de Cantor y la lógica que se estaba desarrollando por aquellos años. Sin embargo...

Actividad 4.- Investiga sobre:

d.1) Las paradoja de Russell de la teoría de conjuntos y la lógica. Solución de Zermelo.

d.2) Los teorema de Gödel y sus implicaciones sobre el programa de Hilbert (respuestas los problemas 1 y 2).

A partir de este momento, quedaba establecido que no todo enunciado podría ser demostrado... La seguridad con la que trabajaba el matemático, había desaparecido para siempre. Sin embargo, todo final inesperado (el final trágico que anulaba el sueño de Hilbert) dio lugar al desarrollo de la lógica y de ahí a los primeros computadores solo había un paso. La puerta a la programación quedó abierta... Un camino que podremos analizar en otras Unidades.

Actividad 5.- Currículum de dos personajes del momento

Utilizando el modelo de CV-Europass <https://europa.eu/europass/es/create-europass-cv> elabora una reseña sobre las figuras de Emmy Noether y de Ludwig Bieberbach, ambas relevantes a principios del s. XX. Como sugerencia, puedes extraer información de alguna de las siguientes páginas (o de cualquier otra, siempre que contrastes la información):

<https://mujeresconciencia.com/2014/06/02/emmy-noether-la-madre-del-algebra-abstracta/>

https://www.ugr.es/~eaznar/emmy_noether.htm

<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bieberbach/>

Ahora imagina que, alrededor de 1930, ambos optasen a un mismo puesto en la prestigiosa Universidad de Gotinga. ¿A quién crees que elegirían? Argumenta tu respuesta.

Guía para el profesorado.

Introducción.

En esta UD planteamos un acercamiento a una época de inflexión en las matemáticas: el sueño logicista de David Hilbert y la crisis de fundamentos causada a principios del s. XX como consecuencia de la respuesta negativa a alguno de los objetivos planteados por éste.

El punto de partida de las actividades propuestas es la factorización y resolución de ecuaciones polinómicas y la construcción de todos los conjuntos numéricos (naturales, enteros, racionales y reales) para poder analizar su cardinalidad. Tras abrir una ventana histórica a los primeros años del s. XX y el optimismo sobre la evolución de la disciplina, la Unidad culmina con el análisis de dos grandes figuras del momento, Emmy Noether y Ludwig Bieberbach, antagónicas en muchos de sus puntos clave.

La UD ofrece cinco grandes actividades, que pueden desarrollarse en otras tantas sesiones, o elegir solo algunas de ellas o de sus apartados. Partiendo de los conjuntos numéricos que tan bien conocen, sería deseable motivar en el alumno la necesidad de una rigorización de conceptos lógicos al estilo de como los introdujo Cantor. Posteriormente presentar las ambiciones de Hilbert y por último las conclusiones de Gödel. Somos conscientes de lo elevado de la propuesta, por lo que los temas pueden reducirse a una mera presentación de ideas.

Sesiones 1 y 2: Antecedentes.

Actividad 1.- Partiendo de la base de los conjuntos numéricos, el alumno debe comprender la biyección existente entre los números naturales y los números pares/impares o de otros subconjuntos de los números naturales. Debe llegar a la conclusión de que la cantidad de elementos del conjunto hace referencia a "contarlos" en referencia y ordenados con respecto a los números naturales. A partir de ahí, el propio alumno puede sugerir cómo contar cuántos números enteros y racionales hay. Se muestra el proceso diagonal de Cantor para concluir, por reducción al absurdo, que los números del intervalo $[0,1]$ son en mayor cantidad que los naturales. Por último, se pide investigar sobre los conceptos formales utilizados.

Actividad 2.- Quizá sea la más alejada del hilo conductor de la Unidad, pero también ofrece una nueva línea de trabajo para el alumno (propiedades de las raíces racionales de una ecuación y resolución por radicales de ecuaciones polinómicas). Se espera que el alumno vislumbre que no todo número puede ser solución de una ecuación de segundo grado (pues las soluciones quedan expresadas en términos de suma, resta, multiplicación, división y raíz cuadrada) y, a partir de ahí, que no cualquier número real puede serlo de alguna ecuación polinómica. Con las relaciones de Cardano-Viète se comprende que estos números deben buscarse más allá de los racionales, lo que nos lleva a la clase de números algebraicos y trascendentes. Para conectar esta actividad con la primera, puede ser instructivo, a la vez que sorprendente mostrar la paradoja de que exista una cantidad no numerable de números trascendentes y apenas conozcamos un puñado de ellos explícitamente.

Sesión 3: El optimismo de finales del s. XIX

Actividad 3.- Esta actividad está encaminada a aportar cultura histórica a los alumnos. Es importante conocer el contexto en el que surgieron los problemas matemáticos y las conexiones con los más elementales que estudian ellos. En particular, la teoría conjuntista de Cantor dio esperanza a Hilbert para fundamentar de forma lógica todo el edificio matemático: durante el Congreso Internacional de Matemáticos del año 1900 en París, presentó un listado de 23 problemas que él consideraba relevantes para el avance de la matemática a lo largo del s. XX. En particular los problemas 1 y 2 trataban sobre la fundamentación lógica, y el problema 7 sobre si ciertos tipos de números eran algebraicos o trascendentes.

Sesión 4: La dura realidad

Actividad 4.- El sueño lógico de Hilbert se ve truncado por dos razones: primero, la aparición de paradojas dentro de la teoría conjuntista de Cantor (singularmente, la paradoja de Russell que los alumnos pueden comprender muy bien en su versión del barbero) y, por otro lado, los teoremas de Gödel que hacían ver que había enunciados dentro de las matemáticas que no podrían discernirse como verdaderos o falsos con los axiomas establecidos. En particular, la Hipótesis del Continuo, que habla sobre los posibles tamaños de infinito, es uno de estos enunciados y que debe incorporarse a la teoría de Zermelo para poder seguir "haciendo" matemáticas. En contrapartida, se generó un impulso enorme de la lógica que dio lugar a la teoría de la computación y el surgimiento de los primeros embriones de ordenador.

Actividad 5.- Como cierre de los años de optimismo matemático, así como de la Belle Époque y los locos años 20 (con el paréntesis de la Primera Guerra Mundial) llega el ascenso del nazismo. Las matemáticas no fueron ajenas a la situación política, y es por ello que sugerimos analizar las figuras de Emmy Nöether (mujer y judía, reconocida por sus grandes logros en matemáticas y física pero no siempre remunerada en consecuencia) y la de Ludwig Bieberbach (hombre... y uno de los más relevantes matemáticos adeptos a las ideas del incipiente nacionalsocialismo). Se propone elaborar un CV de cada uno de ellos, con sus aspectos clave, y deliberar sobre quién sería elegido para un hipotético puesto en la Universidad. En la propuesta para el alumnado se sugieren algunas webs de las que extraer información.