El tiempo cíclico: la curva cicloide.

«Si el tiempo es la imagen de lo eterno,

el futuro vendría a ser el movimiento del alma hacia el porvenir.

El porvenir sería a su vez la vuelta a lo eterno.»

Jorge Luis Borges.

Propuesta para el alumnado.

Introducción.

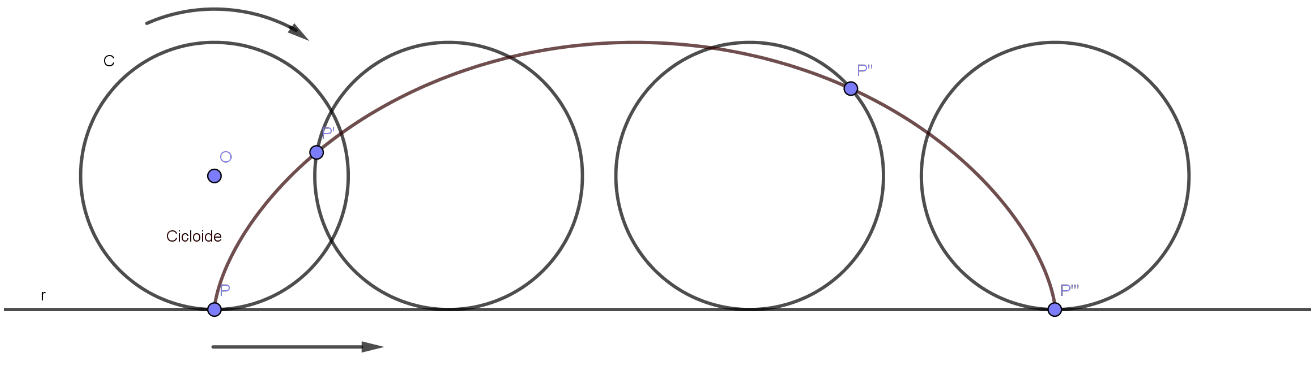
El inexorable paso del tiempo, que nunca vuelve, tiene una representación temporal lineal. Sin embargo, una y mil veces habrás escuchado eso de que "la Historia se repite" dando lugar a una representación circular del tiempo. Pues bien... si combinamos un movimiento lineal, con otro circular, obtenemos la llamada curva cicloide. Vamos a ver cómo se obtiene su representación, así como algunas de sus propiedades y relación con otras curvas cíclicas.

Pero antes de nada... ¿Se te ocurre dónde puedes encontrar esta curva en el mundo real?

Definición y representación de la cicloide.

La curva cicloide es un lugar geométrico que se define como la trayectoria seguida por un punto P situado en una circunferencia C cuando ésta se desplaza rodando (sin resbalamiento) sobre una recta r que es tangente a C.

En el siguiente dibujo tienes una representación de esta curva. ¿Qué distancia hay entre los puntos inicial y final de la trayectoria, señalados sobre la recta r?



Podemos obtener una representación aproximada, a mano alzada o utilizando regla y compás, siguiendo los siguientes pasos:

1. Rectificar la circunferencia: a partir de la circunferencia y la recta tangente, sitúa el punto P. Traslada desde P tres diámetros y un séptimo de éste. Habrás obtenido el punto final de la trayectoria. ¿Qué aproximación de pi estamos usando aquí?

2. Utiliza el teorema de Thales para dividir el segmento obtenido en el paso anterior, en ocho partes iguales (Recuerda: por P traza una recta cualquiera, divídela en ocho segmentos de igual pero arbitraria longitud, une el punto final del octavo segmento con el punto final de la trayectoria y traza paralelas por las marcas anteriores).
3. Divide la circunferencia en ocho arcos, utilizando cuatro diámetros (comenzando uno de ellos en el punto inicial de la trayectoria).
4. Por los puntos marcados en la circunferencia, traza rectas paralelas (rectas–guía) a la recta directriz. Y desde los ocho puntos del segmento rectilíneo, traza perpendiculares a la recta. Las intersecciones de estas perpendiculares con la recta-guía central son los puntos que representan al centro de la circunferencia según va rodando.
5. Por último, con la longitud del radio de la circunferencia y centro en los puntos del paso anterior, obtén el arco que interseca con cada una de las rectas-guía y da como resultado los puntos de la cicloide.
6. Uniendo los puntos obtenidos, obtenemos una aproximación de la curva cicloide.

Ecuación de la cicloide.

Para obtener la ecuación paramétrica de la cicloide, vamos a ayudarnos de las razones trigonométricas. ¿Podrías obtener unas ecuaciones paramétricas de la cicloide?

Utiliza el eje OX como recta de desplazamiento y sitúa la circunferencia C de radio r con centro en (0,r). Ten en cuenta las siguientes observaciones, y pide ayuda a tu profesor:

- El desplazamiento del punto viene dado en términos de la longitud del arco de circunferencia. Por tanto, usaremos como parámetro el ángulo que forma el radio determinado por el punto en cada instante con respecto a la vertical.
- En cada instante, el desplazamiento horizontal de la circunferencia es el mismo que el de la longitud del arco que ha girado el punto. El centro permanece a altura constante. ¿Sabrías dar ya las coordenadas del centro en cada instante?
- Utiliza el triángulo determinado por el punto P en la nueva posición, con hipotenusa el radio de la circunferencia, para obtener las razones trigonométricas del ángulo t en cada instante. ¿Qué coordenadas tendrá entonces el punto P?

Deberás llegar a la siguiente expresión de las coordenadas, en función del parámetro:

$$\begin{cases} x = r(t - \sin t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{cases}$$

Propiedades... y un poco de Historia.

La curva cicloide posee propiedades realmente interesantes y sorprendentes. Por ejemplo:

- La longitud de la curva es ocho veces el radio, mientras que el área que encierra es tres veces el del círculo que generó la curva.
- Su curva envolvente determinada por los vectores normales resulta ser la misma cicloide.

- Es una curva braquistócrona, tautócrona e isócrona. Es decir: es la curva que minimiza el tiempo de caida de un objeto de entre todas las curvas que unen dos puntos, además el tiempo de caída libre (sin velocidad inicial) es independiente del punto inicial desde el que se libere el objeto y si obviamos la fricción, el objeto tendría un movimiento periódico independiente de la posición inicial.

La curva cicloide ha sido estudiada desde antiguo, pero sin duda es en el s. XVII cuando se desarrollaron las herramientas matemáticas necesarias para abordar los problemas físicos que se plantearon. De esta forma, Bernoulli, Leibniz, Newton o Huygens trabajaron en el estudio de esta curva y obtuvieron algunas de las propiedades anteriores. En particular, las propiedades físicas de esta curva han permitido su aplicación en mecánica, y se utiliza para la fabricación de engranajes y péndulos. Investiga sobre las propiedades de la cicloide ya mencionadas y busca algunas otras.

Otras curvas relacionadas.

Existen multitud de curvas cíclicas, todas ellas generadas por la trayectoria de un punto al desplazarse en una circunferencia. Aquí hemos estudiado la cicloide pero haciendo ligeras modificaciones a partir de su definición podemos obtener otras muchas.

Investiga sobre las diferentes modificaciones de una cicloide y los nombres que reciben según varía el lugar en el que se mueve el punto P. Lo mismo cuando en lugar de desplazarse por una recta, lo hace por una circunferencia.

Guía para el profesorado.

Introducción.

Esta unidad didáctica está pensada desde las matemáticas, pero la representación de la curva puede abordarse desde el dibujo técnico. Igualmente, las propiedades físicas de la curva cicloide la convierten en un interesante ejemplo para implementar prácticas de Física a partir de esta propuesta.

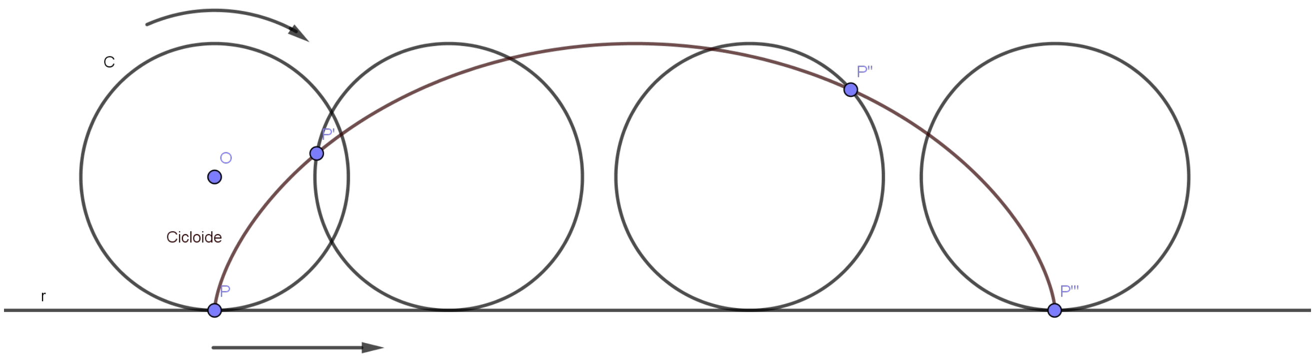
Como en otros casos, proponemos dedicar alrededor de tres sesiones una vez abordados los contenidos de trigonometría en Matemáticas y movimientos uniforme y circular en Física y Química.

La curva cicloide puede encontrarse al observar el desplazamiento de cualquier vehículo sobre ruedas: una bicicleta, un coche...

Sesión 1: Definición y representación de la curva cicloide.

Esta curva representa el lugar geométrico de puntos del plano definidos como la trayectoria seguida por un punto P situado en una circunferencia C cuando ésta se desplaza rodando (sin resbalar) sobre una recta r que es tangente a C.

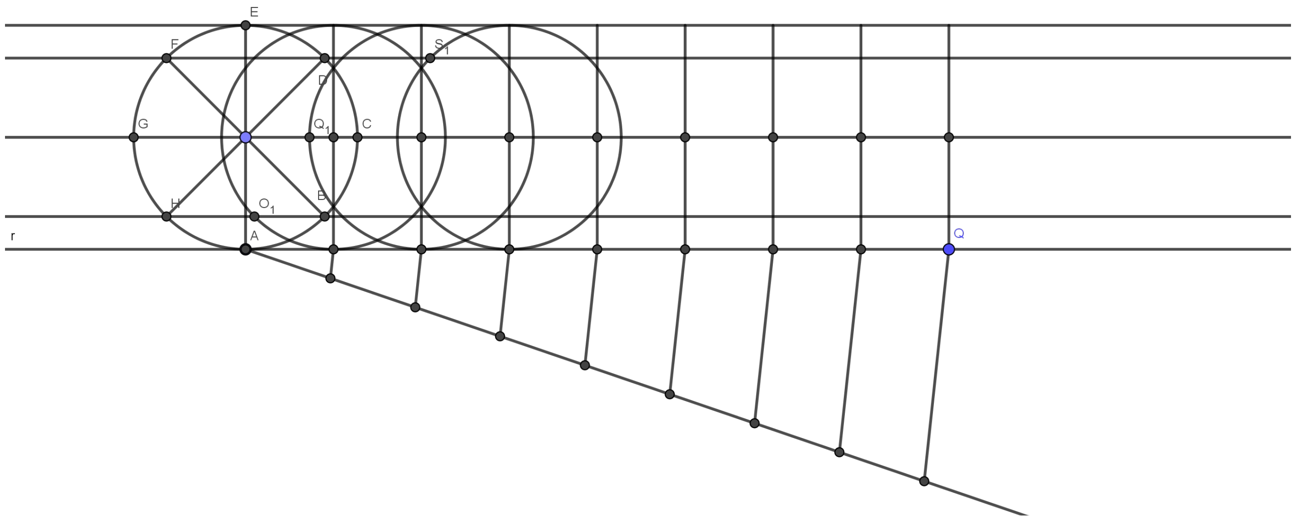
En el siguiente dibujo tienes una representación de esta curva. La distancia entre los dos puntos es, evidentemente, la longitud de la circunferencia. Por tanto, pi veces el diámetro.



Podemos obtener una representación aproximada, utilizando regla y compás, siguiendo los siguientes pasos:

1. Rectificar la circunferencia: a partir de la circunferencia y la recta tangente, sitúa el punto P. Traslada desde P tres diámetros y un séptimo de éste. Habrás obtenido el punto final de la trayectoria. La aproximación utilizada es 3+1/7 = 3.142, cota superior para el valor de pi dada por Arquímedes en el s. III a. C.
2. Utiliza el teorema de Thales para dividir el segmento obtenido en el paso anterior, en ocho partes iguales. Trazando por P una recta cualquiera, se divide en ocho segmentos de arbitraria pero igual longitud. Uniendo el punto final del octavo segmento con el punto final de la trayectoria y trazando las paralelas por las marcas anteriores se obtiene la división.

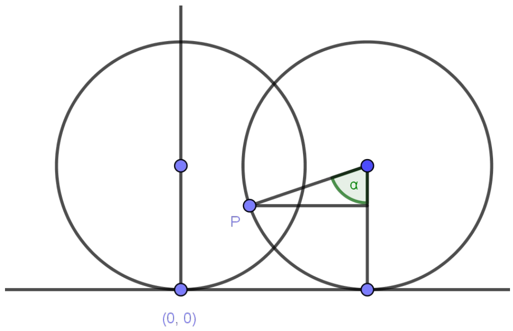
3. Divide la circunferencia en ocho arcos, utilizando cuatro diámetros (comenzando uno de ellos en el punto inicial de la trayectoria). Mediante perpendicular por P y bisectrices.
4. Por los puntos marcados en la circunferencia, traza rectas paralelas (rectas-guía) a la recta directriz. Y desde los ocho puntos del segmento rectilíneo, traza perpendiculares a la recta. Las intersecciones de estas perpendiculares con la recta-guía central son los puntos que representan al centro de la circunferencia según va rodando.
5. Por último, con la longitud del radio de la circunferencia y centro en los puntos del paso anterior, obtén el arco que interseca con cada una de las rectas-guía y da como resultado los puntos de la cicloide.
6. Uniendo los puntos obtenidos, obtenemos una aproximación de la curva cicloide.



Sesión 2: Ecuación de la curva cicloide.

Para obtener la ecuación paramétrica de la cicloide, vamos a ayudarnos de las razones trigonométricas. Como el desplazamiento de la circunferencia hace que la ordenada esté en relación con la longitud de la corunferencia, es conveniente considerar que el parámetro t represente un ángulo. Suponemos también que la recta sobre la que se apoya la circunferencia es precisamente el eje OX, de ecuación y=0.

De esta forma, si la circunferencia C tiene radio r, el centro de la circunferencia se situará en los puntos de la forma (r·t, r). Si dejamos que la circunferencia comience su rodamiento, el punto P(x,y) ahora se hallará en un lugar que cumple que la longitud de arco recorrida es igual a la distancia horizontal que se ha desplazado el centro.



Haciendo uso del triángulo determinado por el punto P en la nueva posición (ver imagen) con hipotenusa el radio de la circunferencia, las coordenadas que obtenemos son

$$(x\,,y)=(r\cdot t-r\cdot sent\,,r-r\cdot cost) \quad \text{y por tanto} \quad \begin{cases} x=r(t-\sin t) \\ y=r(1-\cos t) \end{cases}$$

Téngase en cuenta que la distancia entre los dos puntos de tangencia en la recta está parametrizada por la longitud de arco, es decir, que están separados r·t.

Sesión 3: Propiedades, Historia y otras curvas relacionadas.

La curva cicloide posee propiedades realmente interesantes y sorprendentes. Sin embargo, no son sencillas de demostrar con las herramientas que se poseen aún a este nivel. La longitud o el área bajo la curva requiere del cálculo integral, mientras que las propiedades sobre su envolvente hay que usar cálculo diferencial y también algunas identidades trigonométricas. Es muy recomendable continuar en cursos posteriores con la demotración de algunas de las propiedades que se mencionan en la propuesta para el alumnado.

En cuanto a las variantes relacionadas con la cicloide, se pueden mencionar las siguientes:

- Si en lugar de estar sobre la circunferencia, el punto se encuentra en la región interior entonces la trayectoria descrita se denomina *cicloide acortada,* mientras que si el punto está en la prolongación exterior de un radio se denomina *cicloide alargada.* Todas ellas se agrupan bajo el nombre de *trocoides.*
- Si en lugar de desplazarse sobre una recta, la circunferencia se desplaza sobre el interior de otra circunferencia, la curva obtenida entonces se denomina *hipocicloide.* Si rueda en el exterior de una circunferencia, la curva obtenida se denomina *epicicloide.* Un caso particular de hipocicloide es la curva *astroide,* mientras que un caso particular de epicloide es la curva *cardioide.*
- Tanto hipocicloides como epicicloides tienen sus versiones acortadas o alargadas, que reciben el nombre de *hipotrocoides* y *epitrocoides,* respectivamente.