Contenido y continente: La incansable búsqueda del rigor en Matemáticas.

«Wir Müssen wissen. Wir werden wissen.»

«Debemos saber, sabremos»

David Hilbert.

Introducción: la necesidad de un lenguaje universal.

Es globalmente aceptado que el inglés se ha impuesto como idioma de comunicación entre dos personas de nacionalidades y lenguas maternas diferentes. Este hecho es apreciable al analizar las publicaciones científicas desde mitad del s. XX, en las que el inglés se impone abrumadoramente sobre otros como el francés o el alemán, muy utilizados en la primera mitad de aquel siglo, o el ruso, utilizado por los científicos soviéticos. Pese a que actualmente aún existen una minoría de revistas que aceptan artículos en otros idiomas, es innegable el aislamiento que existió en la ciencia rusa o china hasta las traducciones de mediados del s. XX y el aperturismo que conllevaron.

Estas dificultades se difuminan en el caso de las matemáticas, pues su lenguaje pretende precisamente despojar los resultados teóricos, a través del formalismo, de todo atisbo de lenguaje geográfico. Si bien es cierto que han de construirse frases e incluso párrafos redactados en lo que podríamos llamar lenguaje natural, los teoremas y sus demostraciones se apartan de dicho lenguaje y son escritos mediante una serie de reglas acordadas universalmente.

Ya en el primer Congreso Internacional de Matemáticos, celebrado en Zúrich en 1897, una de las grandes preocupaciones fue la de uniformizar la notación utilizada y la forma de comunicación de los avances científicos en general y matemáticos en particular. Al igual que haría medio siglo después la Convención General de Pesos y Medidas estableciendo el Sistema Internacional para las unidades de magnitudes físicas, la comunidad matemática se puso en manos de los sistemas lógico–deductivos para uniformizar los resultados sobre una base común.

Pero los orígenes de la lógica hunden sus raíces en momentos mucho anteriores. En concreto, suele considerarse a Aristóteles como uno de los padres de la lógica gracias al silogismo y, basado en ello, Euclides utilizó una suerte de método axiomático–deductivo para elaborar los Elementos, una de las obras cumbre de la matemática griega. Indaga sobre estas dos figuras históricas, trata de esclarecer en qué consiste el silogismo aristotélico y consulta la estructura lógica que sigue la obra de Euclides.

Continente: el lenguaje de la Lógica.

La lógica es una rama del conocimiento, usualmente vinculada a las Matemáticas pero también asociada a la Filosofía, que procura realizar un análisis de la validez de un conjunto de premisas más allá de su concreción semántica, es decir, sin referirse al contenido particular de una sentencia. Por tanto, puede entenderse la lógica como un continente de información que puede ser analizado a la espera de ser particularizado con un contenido concreto.

La sentencia "si hoy es lunes, entonces mañana será martes" tiene la misma estructura lógica que "si ahora llueve, entonces el suelo de la calle se mojará" pues, más allá de su concreción, ambas tienen una estructura del tipo "si..., entonces..." y por tanto podemos analizarla independientemente de la forma concreta que tome después.

Dentro de los fundamentos de la lógica, podemos distinguir varios niveles de complejidad en la formación de enunciados o sentencias lógicas. Para lo que nos atañe, nos bastará quedarnos con los dos primeros estadios (que no son necesariamente sencillos) y que se hayan en la base de los razonamientos deductivos. El primero de ellos es la lógica proposicional y el segundo, apoyado en el anterior, la lógica cuantificada de primer orden. Veamos los rudimentos que rigen las construcciones en cada una de estos contextos.

Lógica proposicional. Reglas deductivas.

La lógica proposicional o lógica de predicados se centra en analizar la validez lógica de sentencias formadas a partir de un alfabeto p, q, r, ... junto a conectivas lógicas. Las conectivas básicas son:

- Negación: Si p es una proposición, entonces $\neg p$ representa su negación. Se lee "no p" y es el predicado de verdad opuesta al predicado p.
- Disyunción: Si p, q son dos proposiciones, entonces $p \vee q$ representa su disyunción. Se lee "p o q" y es el predicado cuya veracidad se da cuando al menos uno de los dos predicados que lo forman es cierto.
- Conjunción: Si p, q son dos proposiciones, entonces $p \wedge q$ representa su conjunción. Se lee "p y q" y es el predicado cuya veracidad se da cuando ambos predicados son ciertos de forma simultánea.
- Implicación: Si p, q son dos proposiciones, entonces $p \rightarrow q$ representa su implicación. Se lee "si p entonces q" o también "p implica q" y es el predicado cuya veracidad no es cierta solo cuando dándose la veracidad del antecedente (p) no se obtiene la de su consecuente (q).

Estas conectivas son funciones en un sentido estricto, esto es, las proposiciones que las forman tendrán como valor de entrada una veracidad o una falsedad y de la aplicación de la conectiva se deducirá una veracidad o falsedad. Suele convenirse en tomar como veracidad el valor V=1 y como falsedad el valor V=0, también representado simplemente por V y F respectivamente.

Una tabla de verdad es una forma de explicitar visualmente la veracidad de una construcción lógica. En particular, de las definiciones anteriores se observa que las tablas de verdad de las conectivas básicas son:

p	$\neg p$
0	1
1	0

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

A los símbolos de conectivas se les añaden dos más que representan la contradicción $\perp$ que siempre toma el valor lógico 0, y la tautología $\top$, que siempre toma el valor lógico 1. Una vez introducidos los símbolos de proposiciones $\Sigma=\{p, q, r, ...\}$ que se refieren a un enunciado simple, los símbolos lógicos básicos $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \perp, \top\}$ y los paréntesis (,) que se usan como símbolos auxiliares para evitar ambigüedades, tenemos ya disponible lo que denominamos el alfabeto. Ahora debemos conocer las reglas a través de las cuales se forman enunciados más complejos a partir de los sencillos y la forma de proceder es por inducción y recursión: suponiendo que un enunciado está bien formado, usando las símbolos lógicos se obtienen enunciados bien formados. En concreto, disponemos de las siguientes reglas:

(F0) Las fórmulas formadas por un solo símbolo de $\Sigma \cup \{\perp, \top\}$ son fórmulas bien formadas.

(F1) Si φ es fórmula bien formada, entonces su negación $\neg\varphi$ es una fórmula bien formada.

(F2) Si φ, ψ son dos fórmulas que están bien formadas, entonces su conjunción $(\varphi \wedge \psi)$, disyunción $(\varphi \vee \psi)$ e implicación $(\varphi \rightarrow \psi)$ son fórmulas bien formadas.

Observa que la regla de formación (F0) es en la que se sustenta la formación de las demás, pues presupone, por imperativo, que los símbolos proposicionales (sin conectores) son fórmulas bien formadas. A estas fórmulas se les conoce como 0-ádicas, mientras que la negación a la que se refiere la regla (F1) es monádica y los conectores de la regla (F2) son diádicos. Esta denominación atañe a los conectores vistos como una función: constante, de una variable o de dos, respectivamente.

Analiza si las siguientes fórmulas están bien formadas o no:

(a) $(p \rightarrow (q \wedge \neg r))$ (b) $\neg(p \vee \rightarrow q)$ (c) $(p \vee \neg(r \rightarrow q))$ (d) $p(s \vee \neg q) \rightarrow r$

Por ejemplo, la fórmula $(\neg(p \vee q) \rightarrow r)$ está bien formada y lo argumentamos aplicando reiteradamente las tres reglas de formación de la siguiente manera: p, q están bien formadas por (F0), luego $(p \vee q)$ está bien formada aplicando (F2) y entonces $\neg(p \vee q)$ también está bien formada por la regla (F1). De nuevo por (F0) se tiene que r está bien y usando (F2) obtenemos que $(\neg(p \vee q) \rightarrow r)$ está bien formada. Fíjate además que la fórmula que hemos analizado es diferente de $\neg((p \vee q) \rightarrow r)$ que también es una fórmula bien formada, lo que pone de manifiesto la importancia del correcto uso de los paréntesis.

Inventa otras fórmulas, tanto bien como mal formadas, y que tus compañeros las analicen.

Los paréntesis ayudan además a evitar ambigüedades, como se ha puesto de manifiesto en el párrafo anterior o también, por ejemplo, con la fórmula $\neg p \wedge q$. Esta fórmula en principio no estaría bien formada, pues podría referirse tanto a la fórmula $(\neg p \wedge q)$ en la que primero se forma la negación y luego la conjunción, como a la fórmula $\neg(p \wedge q)$ en la que primero se forma la conjunción y luego la negación. Pero podríamos aceptarla estableciendo algunos convenios.

Por suerte, podemos evitar el uso de paréntesis que, con buen juicio, son a todas luces innecesarios o redundantes, como en la fórmula $(p \rightarrow q)$ que no lleva a ninguna confusión si se escribe simplemente como $p \rightarrow q$. En general podremos prescindir de la última pareja de paréntesis siempre que estos sean externos a la fórmula. Y al igual que con las operaciones aritméticas, se puede establecer una jerarquía de modo que, ante la existencia de ambigüedades se deben aplicar primero las conectivas en el orden $\neg; \wedge; \vee; \rightarrow$. Por último, convenimos también que cuando haya varios conectores iguales, se asocian de derecha a izquierda. Con estos convenios, la fórmula $\neg p \vee q \rightarrow r$ debe interpretarse como $((\neg p \vee q) \rightarrow r)$ frente a otras posibles interpretaciones como las que se han mencionado en los párrafos precedentes, mientras que la fórmula $p \rightarrow q \rightarrow r$ debe entenderse en el orden $(p \rightarrow (q \rightarrow r))$.

Revisa las fórmulas que han aparecido hasta ahora y reescríbelas eliminando los paréntesis innecesarios. Y, eliminando todos los paréntesis, reconstruye la fórmula a la que se refieren cuando se siguen los convenios de jerarquía. ¿Obtienes la misma fórmula u otra diferente?

Resulta que, dada una fórmula bien formada (aún sin el uso exhaustivo de paréntesis), existe una única forma de obtener esta fórmula a partir de los símbolos proposicionales básicos y la aplicación reiterada de las reglas de formación (F0), (F1) y (F2) junto con los convenios anteriores. En consecuencia, se puede construir la tabla de verdad de cualquier fórmula bien formada basándonos en las tablas de verdad de las conectivas lógicas elementales y aplicándolas en el orden que requiera el algoritmo de formación de la fórmula analizada. En el caso de la fórmula $\neg p \vee q \rightarrow r$ su tabla de verdad sería:

p	q	r	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$\neg p \vee q \rightarrow r$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	1

Cuando la columna que resulta para la veracidad de una fórmula es la misma que para otra fórmula, se dice que esas fórmulas son equivalentes, lo que expresamos como $\varphi \equiv \psi$. Cuando para una fórmula φ se obtiene una columna de verdad únicamente con el valor 0, se da la equivalencia $\varphi \equiv \perp$ y se dice que es una contradicción, mientras que si el valor es idénitacamente 1 se dice que es una tautología y se da la equivalencia $\varphi \equiv \top$. Realiza las tablas de verdad de las fórmulas con las que has ido trabajando anteriormente y decide si hay algunas fórmulas equivalentes a otras.

Algunas equivalencias lógicas tienen particular importancia dado su uso frecuente, como por ejemplo las leyes que se describen a continuación y de las cuales puedes realizar las tablas de verdad de y concluir que efectivamente son equivalencias lógicas. Alternativamente, también puedes deducir las últimas utilizando las primeras ya probadas:

Asociativa: $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$, $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

Conmutativa: $p \vee q \equiv q \vee p$, $p \wedge q \equiv q \wedge p$

Distributiva: $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$, $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Leyes de De Morgan: $\neg (p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$, $\neg (p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

Idempotencia: $p \vee p \equiv p$, $p \wedge p \equiv p$

Doble negación: $\neg\neg p \equiv p$

Absorción: $p \vee (p \wedge q) \equiv p$, $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

Tercio excluso: $p \vee \neg p \equiv \top$

Contradicción: $p \wedge \neg p \equiv \bot$

Lógica cuantificada (de primer orden).

Una vez construida la lógica proposicional, observamos que hay enunciados que no se ajustan plenamente a esta estructura. Por ejemplo, la frase "hay un número primo que es par" no nos habla de una propiedad universal de los números primos, sino de la existencia de un elemento particular que cumple cierta propiedad. En consecuencia, la semántica de la lógica de proposiciones debe ser enriquecida, dando así lugar a la lógica de primer orden.

Los nuevos elementos que se introducen van a ser predicados que establezcan alguna propiedad o relación entre las variables y constantes que se consideren. Se suele denotar por $a, b, c, \ldots$ las constantes y por $x, y, z, \ldots$ las variables, mientras que $P(a)$ o $P(x)$ viene a significar que el elemento a o la variable x cumplen la propiedad P a la que se refiera el correspondiente predicado o en el caso de contener más variables, $P(x, a)$ significaría que a se relaciona con x según la propiedad P. Por ejemplo, si P representa la propiedad "ser par", entonces $P(2)$ viene a significar que 2 es un número par, mientras que $F(6,2)$ bien podría referirse, en caso de que así lo estableciera el enunciado F, de la relación de divisibilidad entre dos números, o $F(x,2)$ podría decir que x es un múltiplo de 2. En este nuevo alfabeto, también se abre la posibilidad a operaciones binarias y a un símbolo de igualdad =.

Pero el papel estelar de la lógica de primer orden lo acapara la introducción de los cuantificadores. En concreto hay dos nuevos símbolos fundamentales: el cuantificador universal $\forall$ y el cuantificador existencial $\exists$. Por ejemplo $\exists x P(x, a)$ podría estar formalizando la sentencia "existe un elemento x que es múltiplo de a ". En cuanto a las reglas de formación de fórmulas, ahora los enunciados sencillos se expresan mediante propiedades como hemos visto en el párrafo anterior y necesitamos añadir una regla que nos diga cómo introducir los cuantificadores. Es esta:

(FC) Si φ es una fórmula bien formada, entonces $\forall x \varphi$ y $\exists x \varphi$ son fórmulas bien formadas.

Haciendo uso de predicados y funciones, junto con el axioma (FC), la propiedad que nos habla de que el 0 es el elemento neutro de la suma (es decir $x+0=x$ para cualquier número x), se puede formalizar estableciendo la función $s(x, y)=x+y$ obteniéndose $\forall x (s(x,0)=x)$.

El tratamiento formal de la validez de enunciados en la lógica de primer orden se vuelve algo farragoso y técnico para el nivel en el que nos encontramos. Así que, salvo algunas licencias, podemos considerar que hemos puesto la base para formalizar enunciados de teoremas matemáticos en la sección siguiente.

Contenido: los teoremas de las Matemáticas y su demostración.

Como ya hemos mencionado, la semántica de la lógica nos permite analizar la coherencia lógica de una fórmula, independientemente del significado que adquieran las proposiciones particulares. Cuando le damos un valor particular a las sentencias, es decir, cuando las dotamos de contenido, entonces obtenemos un enunciado formal cuya veracidad puede demostrarse a partir del encadenamiento coherente (lógico) de implicaciones.

La demostración en matemáticas es el método de deducción lógica empleado para sostener la veracidad universal de un enunciado, independientemente de la particularización de sus variables en ejemplos concretos. Juega un papel determinante en la demostración como método la idea del silogismo aristotélico que, como ya habrás visto, pretende obtener la validez de una proposición (la conclusión) a partir de otras conocidas (las premisas) mediante la inferencia lógica que, podemos aceptar, es esencialmente el conector implicación. Particularmente importante como método de demostración es la reducción al absurdo, técnica que se basa en la utilización del principio de tercio excluso, ya que se debe suponer lo contrario de lo que se quiere probar para llegar a una contradicción y, por tanto, no queda más alternativa que aceptar el enunciado que se pretende probar.

Veamos cómo demostrar mediante la técnica de reducción al absurdo algunos enunciados con resultados de tipo aritmético y otros de tipo analítico, principalmente procedentes del cálculo diferencial e integral. En la medida de lo posible, formaliza los enunciados utilizando cuantificadores y analiza la estructura lógica de las demostraciones. Escribe y formaliza enunciados de otros teoremas que hayas estudiado y busca, si no la conoces, alguna demostración de cada uno de ellos.

Enunciado: Los números primos son infinitos. Dicho de otro modo, para cualquier cantidad arbitraria, existe un conjunto con esa cardinalidad formado únicamente por números primos.

Demostración: Por reducción al absurdo, supongamos que hubiera una lista completa $p_1, p_2, \ldots, p_N$ que contuviera todos los N números primos. Si el número $A = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_N + 1$ fuera primo, es evidente que es distinto de cualquiera de los anteriores de la lista y por tanto no está contenido en ella. Por tanto no puede ser primo, pero entonces puede dividirse de forma exacta por un número primo $p \in \mathrm{N}$ y $\exists q \in \mathrm{N}$ tal que $A = p \cdot q.$ Pero p no es ninguno de los números primos de la lista, pues éstos dejarían resto 1 al dividir a $A.$ Luego p es primo pero no estaba en la lista. Esto nos lleva a una contradicción por haber supuesto que había una lista completa de números primos, luego no puede existir tal lista exhaustiva y por tanto los números primos son infinitos.

Enunciado: El número $\sqrt{2}$ es irracional.

Demostración: Por reducción al absurdo, supongamos que existiera una fracción irreducible a/b cuyo cociente fuera precisamente $\sqrt{2}.$ Elevando al cuadrado, obtenemos $a^2 = 2b^2$ de donde a^2 es un múltiplo de 2 y, en consecuencia, a es un múltiplo de 2 [para esto último, si $a = 2\mathrm{k}+1$ entonces $a^2 = 4\mathrm{k}^2 + 4\mathrm{k} + 1 = 2(2\mathrm{k}^2 + 2\mathrm{k}) + 1$ que no es par] y por tanto a=2q, de donde $2\mathrm{b}^2 = a^2 = 4\mathrm{q}^2$ y $b^2 = 2\mathrm{q}^2,$ luego b es también par, lo que contradice que a/b sea una fracción irreducible.

Enunciado: Toda función derivable es continua.

Demostración: Dando por conocido que el límite de un producto es el producto de los límites (siempre que esto tenga sentido) y suponiendo que existe la derivada de f en un punto arbitrario $x_{0,}$ denotada por $f'(x_0)$, se tiene:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)$$

= $f'(x_0)\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=f'(x_0)\cdot 0=0$ y por tanto f es continua en el punto $x=x_{0.}$

Enunciado: (Teorema de Rolle) Si f es una función continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y $f(a)=f(b)$, entonces existe al menos un número $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0.$

Demostración: Por el teorema de Weierstrass se sabe que una función continua en un intervalo cerrado, alcanza un valor máximo y un valor mínimo. Si alguno (cualquiera) de estos dos valores se alcanzasen en un punto $x=c\in(a,b)$, entonces $f'(c)=0$ por ser f derivable. Y si tanto máximo como mínimo se alcanzasen en los extremos del intervalo, entonces f debe ser constante y en ese caso $f'(c)=0$ para cualquier valor $c\in(a,b)$.

Epílogo: rigor y crisis de fundamentos.

La búsqueda de rigor en las matemáticas comenzó a revelarse como necesaria cuando a mediados del s. XVIII surge la teoría de funciones y, con ella, la existencia de ejemplos poco intuitivos como el de funciones continuas cuya gráfica no puede dibujarse o el tratamiento informal que tanto Newton como Leibniz habían hecho de los infinitésimos para deducir las reglas del cálculo diferencial e integral.

Basadas en la idea de límite introducida por D'Alembert, a lo largo del s. XIX aparecen ya definiciones muy similares a las que usamos hoy en día, como por ejemplo la idea de continuidad de una función, atribuible a Bolzano. También la construcción rigurosa de los conceptos de derivada e integral, desarrollados por Cauchy, conllevan un proceso de paso al límite que culminaría con las definiciones $\epsilon-\delta$ de Weierstrass y con las que seguramente ya te hayas encontrado. Escribe con cuantificadores la formalización de, al menos, la definición de función límite de una función en un punto y de función continua.

El afán por la rigorización se convertiría en obsesión cuando Hilbert, en el ICM de París en 1900, instó a la comunidad matemátia a desarrollar un programa investigador centrado en fundamentar todas las ramas de la disciplina. Esta fundamentación quiso utilizar la Lógica y la Teoría de Conjuntos como pilares que sostuviesen al edificio matemático pero, como puedes ver al trabajar la unidad "Aquellos maravillosos años" propuesta para 3º–4º ESO, el surgimiento de, entre otras, la paradoja de Russell y los teoremas de Gödel llevaron a la crisis de fundamentos y acabaron en el colapso del programa logicista. De todos modos, esta crisis supuso un problema al nivel de la metamática pero no restó validez a los avances que se produjeron ni a la forma en la que se conciben los estándares de rigor formal utilizados hoy en día en matemáticas.

Debate sobre la validez de la frase "la lógica es el método de higiene que utilizan los matemáticos para mantener sus ideas fuertes y saludables" atribuida al matemático H. Weyl y que bien podría haber sido la que encabezase esta unidad.