## Contenido y continente: La incansable búsqueda del rigor en Matemáticas.

### [Reseña con indicaciones para el profesorado]

La presente unidad didáctica, aunque parte como una propuesta desde la materia de Matemáticas, puede entenderse y desarrollarse en colaboración con la materia de Filosofía. Consideramos que un momento propicio para desarrollar el presente material puede ser cuando en la asignatura de Filosofía de 1º de Bachillerato se aborde la lógica proposicional, si bien también puede desarrollarse alejada en el tiempo y separadamente de ésta.

Para el desarrollo de las actividades, aconsejamos una dedicación de cuatro o cinco sesiones que pueden ser llevadas a cabo en su totalidad por docentes de Matemáticas o bien alguna de ellas por docentes de Filosofía. Independientemente de lo anterior, recomendamos a modo de orientación la siguiente distribución de actividades dentro de cada sesión.

Teniendo como referencia el texto principal para el alumnado, en las dos primeras sesiones pueden abordarse los orígenes de la lógica y la fundamentación de la lógica proposicional, con las siguientes actividades:

- Indagar sobre las figuras históricas de Aristóteles y Euclides, tratando de esclarecer en qué consiste el silogismo aristotélico, el método axiomático–deductivo y poner de manifiesto la estructura lógica que tiene los Elementos.

  Aristóteles (384 a. C. – 322 a. C) se dedicó principalmente a la Filosofía, aunque se le considera "padre" de varias otras disciplinas. En la Academia de Atenas fue discípulo de Platón y, aunque no se dedicó propiamente a las matemáticas, le debemos el método de razonamiento deductivo denominado "silogismo". En matemáticas, como ciencia formal, para demostrar una afirmación se emplea el método axiomático–deductivo que, partiendo de un conjunto de sentencias denominado axiomas, y cuya veracidad es admitida sin necesidad de demostración, se deducen las consecuencias de los teoremas. La forma de deducción más habitual es el silogismo aristotélico, en el que a partir de unas premisas se obtiene la afirmación de la consecuencia que se pretende.

  Euclides (325 a. C – 265 a. C.) realizó una recopilación bastante pormenorizada y rigurosa de la matemática, que esencialmente era geometría o resultados reducibles a ésta, conocida en su tiempo. Los Elementos de Geometría, o simplemente Los Elementos, es el arquetipo de obra que sigue el método axiomático–deductivo pues establece una serie de definiciones previas y cinco axiomas o postulados de los que se deducen todas las proposiciones que conforman la obra.

- Análisis de la formación de fórmulas, realización de tablas de verdad e identificación de equivalencias lógicas.

  Tomemos como ejemplo la fórmula sugerida en el apartado (c) $(p \vee \neg(r \rightarrow q))$ que está bien formada ya que por (F0) $r$ y $q$ están bien formadas al ser proposiciones atómicas con un solo miembro, aplicando (F2) se tiene que $(r \rightarrow q)$ está bien formada y por (F1) $\neg(r \rightarrow q)$ está bien formada. De nuevo por (F0) se tiene que $p$ está bien formada y por (F2) se concluye que $(p \vee \neg(r \rightarrow q))$ está bien formada.

Haciendo uso sucesivo de la subfórmulas de la construcción precedente, obtenemos que la tabla de verdad de esta fórmula resulta ser:

| $p$ | $q$ | $r$ | $r \rightarrow q$ | $\neg(r \rightarrow q)$ | $(p \vee \neg(r \rightarrow q))$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |

Si omitiéramos todos los paréntesis, la fórmula resultante sería $p \vee \neg r \rightarrow q$ que según las leyes de jerarquía de los símbolos lógicos debe entenderse como $((p \vee \neg r) \rightarrow q)$ y cuya tabla de verdad nos muestra que no es una fórmula equivalente a la original, pues hay filas en las que su valor lógico difiere:

| $p$ | $q$ | $r$ | $\neg r$ | $(p \vee \neg r)$ | $((p \vee \neg r) \rightarrow q)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Las dos sesiones siguientes pueden dedicarse a:

- Realizar una introspección a la lógica de primer orden.
- Formalización de enunciados utilizando cuantificadores y análisis de la estructura lógica de las demostraciones que se sugieren, u otros que el docente considere oportunos, como por ejemplo la formalización de la definición de función límite de una función en un punto y de función continua.

  Una función $f$ tiene límite $L$ en el punto $x_0$, denotado por $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, si

  $$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \mid \ |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Una función $f$ es continua en el punto $x_0$ si

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \mid |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Si por ejemplo denotamos por $D$ la propiedad "ser derivable" y por $C$ la propiedad "ser continua", entonces $D(f)$ y $C(f)$ representan respectivamente las sentencias "f es derivable" y "f es continua". $\forall f(D(f) \rightarrow C(f))$ podría ser una formalización del enunciado que asegura que toda función derivable es continua.

Opcionalmente, se puede dedicar una quinta sesión para:

- Construir una perspectiva histórica del proceso de rigorización y analizar las consecuencias de la crisis de fundamentos. Puede utilizarse material seleccionado de la unidad "Aquellos maravillosos años" que se encuentra entre las propuestas de 3º–4º ESO.
- Debatir sobre la validez de la frase "la lógica es el método de higiene que utilizan los matemáticos para mantener sus ideas fuertes y saludables" atribuida a H. Weyl.