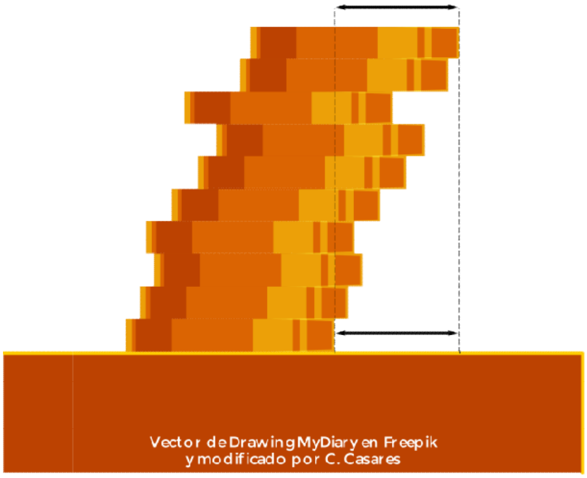
Inclinando torres de monedas

El reto

Imagina que tienes un montón de monedas de un euro y juegas a ponerlas una sobre otra formando una pila. ¿Cuánto puede desplazarse la moneda superior de la torre con respecto a la que está en la base?



Para manipular la torre y empezar a trabajar te recomendamos que, en lugar de construir una torre con monedas (que son pequeñas), utilices libros, baldosas, listones de madera… Es decir, objetos con forma de paralelepípedo que cumplan estas tres condiciones:

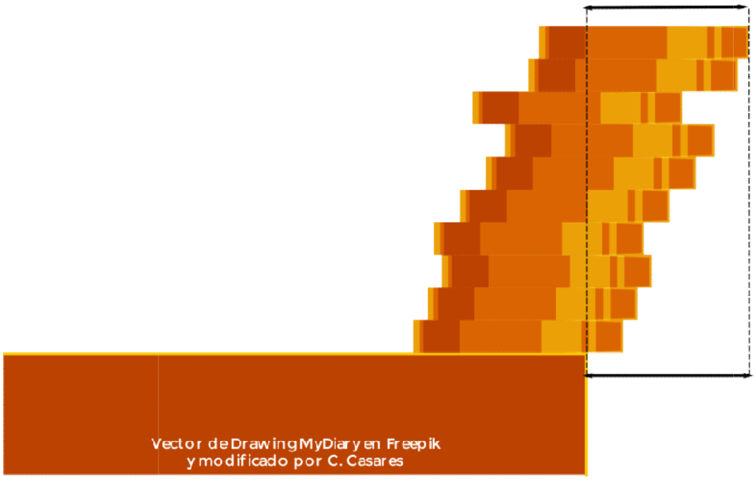
- Que sean de igual de tamaño.
- Que sean de igual peso.
- Y que sean homogéneos (el peso se reparte igual por todas partes).

Vas a construir la torre con dos reglas:

- Sólo puedes colocar una moneda por piso.
- No puedes utilizar adhesivos ni apoyos externos.

No vas a investigar cuánto se desplaza el bloque de arriba con respecto al de abajo, sino que vas a desplazar la torre al borde de la mesa y vas a investigar cuánto puede sobresalir el bloque de arriba como voladizo. Este es el reto.

¿Puede el voladizo superar el tamaño de un bloque?



Busca bloques o libros, ponlos sobre la mesa y experimenta un poco qué ocurre con los bloques al hacer torres cerca del borde. Cuando juegues un rato estarás preparado para empezar. Ahí va una primera pregunta.

¿Cuánto puede sobresalir un único bloque sobre el borde?

Experimenta manualmente con un solo bloque. Ponlo sobre el borde y observa cuánto puede sobresalir sin que se caiga. Para facilitar los cálculos, supón que el bloque mide $\ell = 1u$ de largo.

Expresa tus observaciones en el recuadro. Utiliza un vocabulario técnico. Para ello busca en internet qué es el centro de masas de un cuerpo y reflexiona sobre dónde está el centro de tu bloque (prisma rectangular homogéneo). Incluye también algún dibujo o gráfico.

Un bloque único puede asomarse

$$\ell_1 = \frac{\square}{\square} u$$

sobre el borde (expresa la cantidad en forma de fracción).

¿Cuánto puede medir el voladizo cuando la construcción tiene dos bloques?

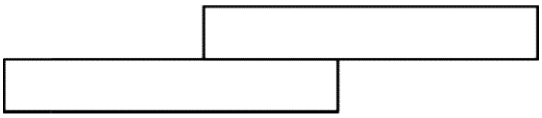
Prueba diferentes situaciones: que el bloque superior sobresalga más sobre el inferior que el inferior sobre la mesa, o que sobresalga menos… ¿Con qué distribución crees que el voladizo es mayor?

Refleja tus reflexiones en el recuadro.

Retoma el concepto de centro de masas (CM en adelante) de los bloques.

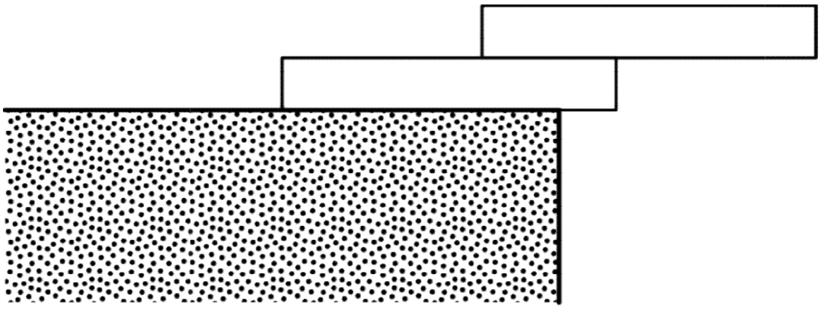
Vector de DrawingMyDiary en Freepik
y modificado por C. Casares

Dibuja sobre el esquema donde está el CM de cada uno de los bloques.



Ahora imagina que los dos bloques forman un único objeto. ¿Dónde estaría el centro de masas de la construcción?

¿Sobre dónde tiene que estar el CM de los dos bloques para que la construcción no se caiga al asomarse?



En la sección anterior averiguaste cuál es el desplazamiento máximo del bloque de arriba sobre el de abajo. Para esa configuración, calcula el CM del sistema formado por los dos bloques y utiliza esa información para colocar los dos bloques lo más asomados que se pueda sin que se caigan. Ayúdate de un dibujo o gráfico, utiliza el espacio del recuadro.

Dos bloques pueden asomarse

$$\ell_2 = \left(\frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square}\right) u = \left(\frac{1}{2 \cdot \square} + \frac{1}{2 \cdot \square}\right) u$$

sobre el borde (expresa la cantidad como suma de fracción de la sección anterior más lo que añadas en esta sección y, si puedes, con numerador 1).

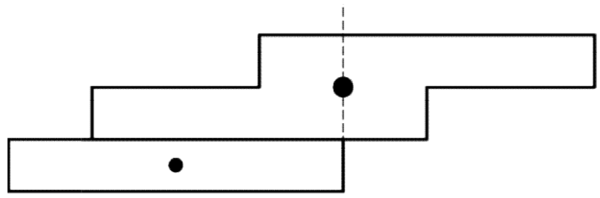
¿Supera el voladizo la longitud del bloque? (recuerda que la longitud de un solo bloque, ℓ, es *1* y, por tanto, la pregunta es equivalente a si ℓ_2 es mayor que ℓ).

Y con tres bloques… ¿superará el voladizo la longitud de uno solo de los bloques?

Manipula un poco tus bloques de madera, vuelve a tomar contacto con la manipulación de la torre. Prueba diferentes voladizos con tres pisos.

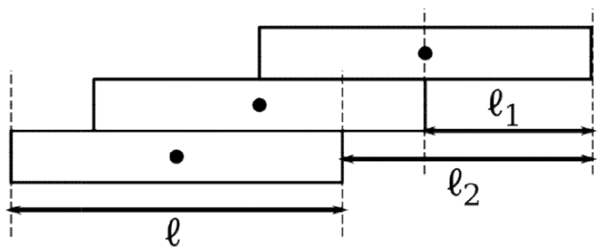
¿El CM de masa de cada bloque puede sobresalir de su bloque inmediatamente inferior? ¿Qué es lo que determina la caída de la torre: la altura del CM o su posición horizontal? Refleja las reflexiones de tus construcciones en este cuadro.

Si ya has probado diferentes construcciones, empieza a generalizar procesos. En la sección anterior, para construir la torre de dos pisos, has colocado el bloque superior sobre el inferior reproduciendo el voladizo de un solo bloque. Parece razonable, entonces, que la torre de tres pisos la construyas asomando sobre el bloque inferior la torre de dos pisos más eficiente. ¿Cuánto puede asomarse la torre de dos así construida sobre el bloque inferior? En efecto, hasta que el CM de la torre llegue justo al borde.

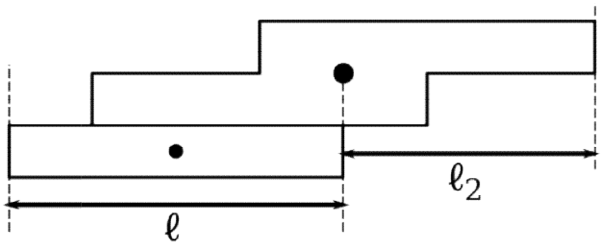


¿Y cuánto puede asomarse la torre de tres sobre el borde de la mesa? Hasta que el CM de la torre llegue justo al borde. El problema se reduce a calcular el centro de masa de la torre de tres pisos.

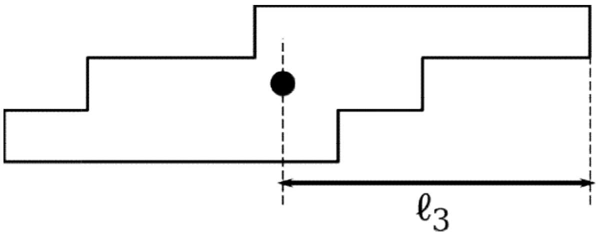
El CM de un cuerpo es su centro geométrico. Se puede calcular como la media aritmética de las posiciones de los CM de los tres bloques iguales. Puedes hacer la suma vectorial, con su coordenadas horizontales y verticales, o quedarte sólo con la horizontal, que es más sencillo y lo verdaderamente relevante en este problema.



También se puede calcular como media ponderada de los CM de la torre de dos y el piso inferior. Eso sí, la torre pesa el doble que el bloque inferior.

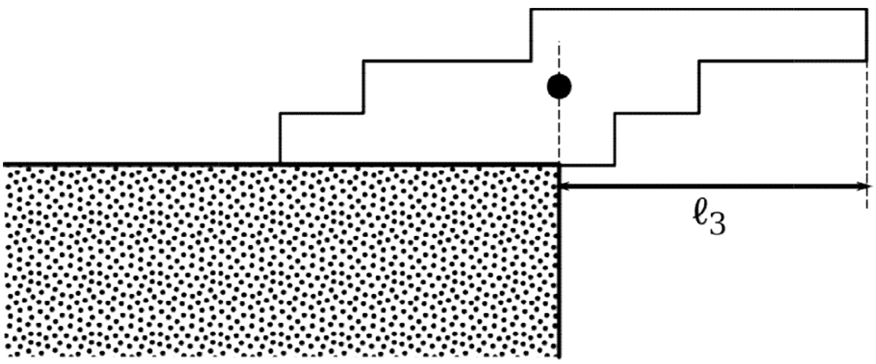


Haz la cuenta de cualquiera de las dos maneras, y con vectores o sólo para la coordenada horizontal. Y encuentra la distancia del borde derecho al centro de masa de la torre de tres alturas.



$$\ell_3 = \left(\frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square}\right) u = \left(\frac{1}{2 \cdot \square} + \frac{1}{2 \cdot \square} + \frac{1}{2 \cdot \square}\right) u$$

¿Supera el voladizo el tamaño de un bloque?



La respuesta

Generalizando la sección anterior

A la vista del resultado para la torre de 3 bloques

$$\ell_3 = \left(\frac{1}{2\cdot\square} + \frac{1}{2\cdot\square} + \frac{1}{2\cdot\square}\right)u,$$

¿Qué expresión se te ocurre para el voladizo de la torre de 4 alturas?

$$\ell_4 = \left(\frac{1}{2\cdot\square} + \frac{1}{2\cdot\square} + \frac{1}{2\cdot\square} + \frac{1}{2\cdot\square}\right)u.$$

¿Supera ese voladizo la longitud de un bloque? (¿$\ell_4 >$ ▯?). Anota tus reflexiones y concluye el reto.

Ahora estás listo para responder al reto:

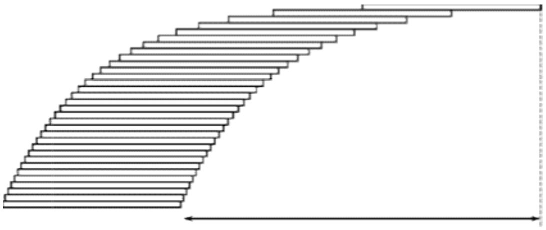
*El voladizo **puede/no puede** superar el tamaño del bloque.*

(tacha lo que no corresponda).

Para saber más

Voladizo máximo para una torre de n pisos

Aprovecha tu esfuerzo y continúa trabajando. Investiga qué expresión tendrá el voladizo de la torre de n pisos.



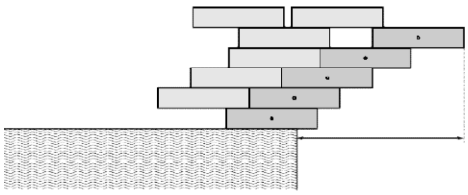
Investiga sobre la serie armónica y relaciónala con tu investigación: ¿qué longitud máxima de voladizo se puede conseguir?

La expresión del voladizo de la torre de n pisos (su doble) recuerda a los primeros términos de la serie armónica. Averigua qué es una serie y qué significa que sea sumable. ¿Es sumable la serie armónica?

Con el conocimiento de la sumabilidad de la serie armónica podrás intuir cuán largo puede ser el voladizo de la torre si aumentas el número de bloques. ¿Te parece intuitivo el resultado?

Cambia las reglas: investiga sobre construcciones que permitan más de un bloque por altura.

Puedes profundizar en los temas de estudio de esta investigación si cambias alguna de las reglas iniciales. ¿Qué construcciones son posibles si permites más de un bloque por nivel? ¿Cómo afecta eso al tamaño del voladizo?



Bibliografía/webgrafía

Casares, Carmen (Agosto de 2023). "Una investigación en el aula: inclinando torres de liras". Aprendizaje basado en la investigación. Fundación General Universidad Politécnica de Madrid, Madrid. ISBN 978-84-09-45164-7, p.p.25 https://oa.upm.es/77372/

Johnson, Paul B. (1955). "Leaning Tower of Lire". American Journal of Physics v. 23, n. 4, p.p.240. https://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.1933957

Paterson, Mike; Zwick, Uri (2009). Overhang. https://arXiv.org/pdf/0710.2357.pdf

Servicio de Innovación Educativa de la UPM (Julio de 2020). Aprendizaje basado en la investigación. Madrid: Universidad Politécnica de Madrid https://innovacioneducativa.upm.es/guias_pdi