

Inclinando torres de monedas



Proyecto	Iniciación a la investigación	
Descripción	Mediante la investigación de los desplazamientos máximos en apilamientos de bloques, se profundiza en el concepto equilibrio mecánico (Física) y de salto al límite (Matemáticas)	
Área de conocimiento	Matemáticas y Física	
Curso/etapa/nivel	1º de Bachillerato	
Competencias clave	En comunicación lingüística (CCL)	CCL1 / CCL3
	Matemática y en ciencia, tecnología e ingeniería (STEM)	STEM1 / STEM2 / STEM3 / STEM4
	Digital (CD)	CD1
	Personal, social y de aprender a aprender (CPSAA)	CPSAA1 / ACPSAA4 / CPSAA5
	Emprendedora (CE)	CE3
Metodología	Aprendizaje Basado en la Investigación (ABI)	
Saberes básicos	Matemáticas I	B. Sentido de la medida: cambio
		C. Sentido espacial: formas geométricas en dos dimensiones, sistemas de representación, razonamiento y modelización geométrica
		D. Sentido algebraico: patrones y modelos matemáticos
		F Sentido socioafectivo: actitudes y respeto
	Física y Química	E. Estática y dinámica
Autora	Carmen Casares Antón	

Guía del profesor: aprender investigando

El Aprendizaje Basado en la Investigación (ABI) es un método de aprendizaje activo basado en la realización de un proceso de investigación que resuelva un problema con el objetivo de que los estudiantes construyan conocimientos por descubrimiento y basados en experiencia prácticas.

La elección de la investigación debe atender al nivel de competencia de los estudiantes y al programa de la asignatura en la que se realiza. Además, la investigación debe graduarse para que se adecúe a la diversidad del estudiantado y para evaluar su progreso. Y debe introducir las técnicas esenciales del método científico, lo que implica el desarrollo de muchos de los pasos siguientes[1]:

- Identificar y estructurar un problema.
- Teorizar acerca de posibles soluciones.
- Escoger una metodología para investigar alternativas de resolución: deducción, inducción, predicción...
- Generar evidencias en base a la investigación.
- Analizar la información y los datos.
- Utilizar pensamiento inductivo e hipotético-deductivo.
- Formular inferencias y conclusiones mediante un proceso de investigación con rigor científico.

En esta actividad se propone una investigación para el aula sobre el equilibrio de estructuras. La finalidad de la investigación es favorecer el aprendizaje de conceptos sencillos de estática, como son el centro de masas y la importancia de su posición en la estabilidad de estructuras, y de matemáticas, como son la búsqueda de patrones, las sucesiones y el paso al límite[2].

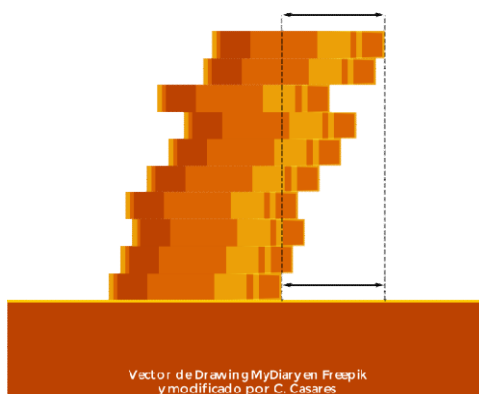
La idea de partida es construir voladizos con bloques homogéneos e iguales superpuestos sin apoyos ni adhesivos, y averiguar si es posible construir un voladizo de longitud mayor o igual que la de uno de los bloques. Una vez encontrada una construcción que resuelve la situación de partida, se anima a los estudiantes a realizar voladizos mayores, analizando los argumentos y deducciones que se utilicen, e induciendo patrones que generalicen los resultados.

El objeto final de la investigación es concluir que se puede realizar un voladizo tan grande como se quiera porque la longitud del voladizo se comporta como la serie armónica, que es divergente.

Esta actividad empieza con contenidos y procesos sencillos al alcance del alumnado de 1º de bachillerato y puede prolongarse a otros más sofisticados que corresponderían, quizá, a un primer curso universitario.

Pregunta objetivo

¿Cuánto puede desplazarse la moneda superior de la torre con respecto a la que está en la base?



El problema original lo planteó y resolvió Paul B. Johnson en una brevísima publicación en 1955 [3]. Respondía a la pregunta de cuánto puede desplazarse la moneda superior respecto de su posición en una pila vertical de liras (la moneda italiana de entonces).

A los estudiantes le plantearemos el problema equivalente, en el que la referencia es el borde de la mesa. ¿Cuánto puede asomarse sobre el borde la moneda superior?

Identificando el problema

Para comenzar la investigación se plantea a los estudiantes una pregunta objetivo y algunos estudios colaterales: ¿puede el desplazamiento de los bloques superar la longitud del bloque?, ¿qué es más estable: desplazar más los bloques superiores o los inferiores?

Estructurando el problema: las reglas

Para focalizar la investigación en los conceptos objetivo de aprendizaje que son, por un lado, centro de masas y equilibrio y, por otro lado, serie armónica y sumabilidad, se restringe el estudio a:

- Apilamientos de bloques homogéneos e iguales.

- Con un único bloque por nivel o piso.
- Sin adhesivos entre ellos ni otros apoyos.

En paralelo a una investigación teórica, es interesante trabajar experimentalmente. Se puede realizar la investigación con listones de madera, o con baldosas o ladrillos, o revistas que hagan las veces de los bloques homogéneos.

Teorizando el problema: el centro de masas

Se introduce, por necesidad en la investigación, el concepto de centro de masas (CM) y se analizan los ejemplos más sencillos.

¿Cuánto puede sobresalir un bloque sobre un borde? Se ha modificado ligeramente el enunciado, se toma como referencia el borde y no la moneda de la base.

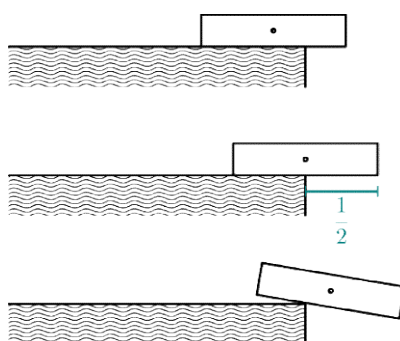


Figura 1. Diferentes situaciones de un bloque al asomar por un borde

Se anima a los estudiantes a que experimenten hasta encontrar la respuesta: el bloque cae cuando su CM asoma por el borde de la plataforma inferior. Es decir, el voladizo puede sobresalir la mitad de la longitud del bloque. Y la posición del centro de masas en esa situación límite es

$$(x_{CM}^{(1)}, y_{CM}^{(1)}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

El origen del sistema de referencia utilizado en la expresión para el centro de masas tiene el origen en la esquina superior derecha del bloque exterior y sentido horizontal y vertical contrarios a lo habitual. Y la unidad del desplazamiento horizontal y vertical son la longitud y altura de un bloque respectivamente.

¿Qué pasa cuando se introduce un segundo bloque y nivel?

El bloque superior puede sobresalir la mitad de su longitud sobre el bloque inferior porque así su centro de masas del sistema formado por los dos bloques no sobresale del borde.

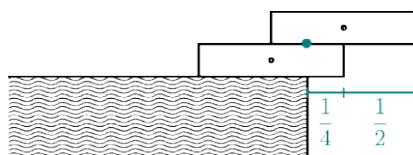


Figura 2. Voladizo máximo en estructura de dos bloques

Y el bloque inferior podrá sobresalir una longitud que mantenga el centro de masas del sistema, que se obtiene como suma ponderada de los centros de masas de los dos bloques, sobre el borde de la plataforma.

$$(x_{CM}^{(2)}, y_{CM}^{(2)}) = \frac{1}{2}(x_{CM}^{(1)}, y_{CM}^{(1)}) + \frac{1}{2}\left(x_{CM}^{(1)} + \frac{1}{2}, y_{CM}^{(1)} + \frac{1}{2}\right) = \left(x_{CM}^{(1)} + \frac{1}{4}, y_{CM}^{(1)} + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}, 1\right).$$

En estos momentos de la investigación los estudiantes habrán observado el hecho de que el centro de masas determina la estabilidad de la estructura y fija la longitud máxima del voladizo a aquella distancia que lo coloca sobre el borde.

Este sería el momento de introducir un tercer bloque. El cálculo de la posición del centro de masas incluyendo el tercer bloque condiciona la longitud máxima del voladizo. Los estudiantes encontrarán, experimentando y deduciendo algebraicamente, que la distribución con tres bloques que maximiza el voladizo es la que se observa en la figura 3.

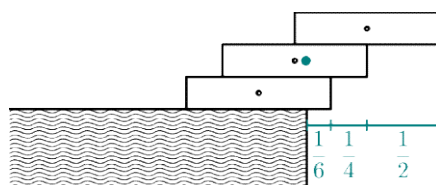


Figura 3. Voladizo máximo en estructura de tres bloques

Introducir un cuarto bloque y nivel ya no añade dificultad a la investigación. Es sencillo llegar la estructura de la figura 4.

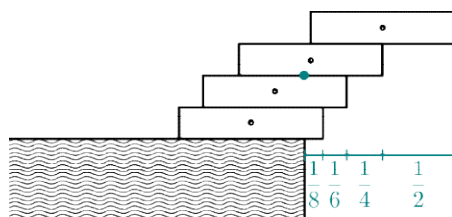


Figura 4. Voladizo máximo en estructura de cuatro bloques

La posición horizontal del centro de masas respecto del extremo para cuatro bloques es

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} > 1.$$

El voladizo, solo con cuatro niveles, ya supera la longitud de un bloque.

Formulando inferencias

Una vez respondida la pregunta inicial, se continúa el estudio porque parece sencillo inferir un resultado más general. Como el sistema de $(n - 1)$ bloques puede sobresalir sobre el bloque inferior una longitud igual a la posición de su centro de masas, el centro de masas del sistema de n bloques tiene coordenada horizontal,

$$x_{CM}^{(n)} = \frac{n-1}{n} x_{CM}^{(n-1)} + \frac{1}{n} \left(x_{CM}^{(n-1)} + \frac{1}{2} \right) = x_{CM}^{(n-1)} + \frac{1}{2n}.$$

Por tanto, si se aumenta el número de bloques y niveles, la longitud del voladizo coincide con la mitad de la serie armónica

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \right) = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{n}.$$

Pero la serie armónica no es sumable. Se concluye, por tanto, que apilando un número suficiente de bloques el voladizo puede superar cualquier longitud.

La investigación no se cierra: problemas ++

Tan importante como obtener un resultado en un proceso de investigación es abrir puertas a otros nuevos procesos. La investigación propuesta puede continuar, quizá fuera del aula, cambiando algunas reglas en el apilamiento si la investigación se realiza en una asignatura de Mecánica, quitando restricciones a las reglas originales. ¿Cuántos bloques se necesitan si se

permite más de un bloque por nivel? Paterson y Zwick realizaron un detallado análisis de estas situaciones [4].

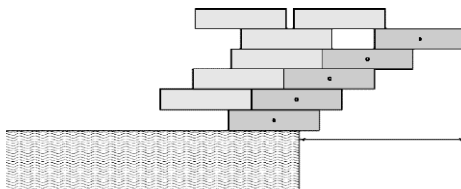


Figura 5. Voladizo para estructuras con otras reglas

O incluso se puede extender la investigación, un poco más teórica pero adecuada si se plantea en una asignatura de matemáticas, estudiando qué relación hay entre la longitud del voladizo y la altura alcanzada. ¿Cuántos bloques se necesitan para que el voladizo supere un determinado número de veces la longitud de un bloque?

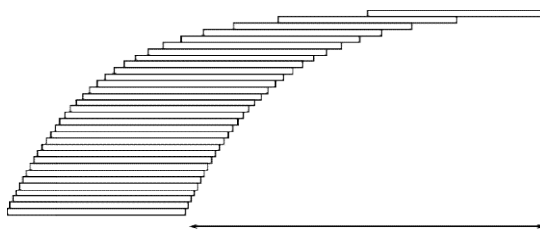


Figura 6. Voladizo de una pila de bloques

Conclusión

El proceso de investigación descrito en esta actividad funciona muy bien en el aula, porque las reglas del estudio son muy sencillas y es fácil encontrar evidencias experimentales. Además, la parte analítica y deductiva tampoco es complicada y los estudiantes pueden realizarla de manera autónoma. Pero lo más interesante es lo espectacular del resultado que se obtiene y las conclusiones que de ese resultado se derivan. Todo ello hace que construir torres de monedas sea una buena propuesta para aplicar la metodología ABI.

Bibliografía/webgrafía

Servicio de Innovación Educativa de la UPM (Julio de 2020). Aprendizaje basado en la investigación. Madrid: Universidad Politécnica de Madrid
https://innovacioneducativa.upm.es/guias_pdi

Casares, Carmen (Agosto de 2023). "Una investigación en el aula: inclinando torres de liras". Aprendizaje basado en la investigación. Fundación General Universidad Politécnica de Madrid, Madrid. ISBN 978-84-09-45164-7, p.p.25 <https://oa.upm.es/77372/>

Johnson, Paul B. (1955). "Leaning Tower of Lire". American Journal of Physics v. 23, n. 4, p.p.240.
<https://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.1933957>

Paterson, Mike; Zwick, Uri (2009). Overhang.
<https://arXiv.org/pdf/0710.2357.pdf>