Estático-dinámico: el Quadrivium, matemáticas en movimiento.

«άγεωμέτρητος μηδείς είσιτω / *ageometretos medeis eisito*»

«No entre aquí el que no sepa Geometría»

*Frase en el frontispicio de la Academia de Atenas, atribuida a **Platón**.*

Introducción.

Desde los tiempos de las civilizaciones más antiguas ha existido la preocupación incesante por establecer un proceso sistemático que guiara el aprendizaje de los jóvenes estudiantes de cualquier disciplina. Los eruditos de la civilización griega quisieron democratizar los procesos de enseñanza y aspiraron a formar ciudadanos plenos, entendiendo por esto personas cultas que dominasen las disciplinas básicas del saber.

Es así que llegaron a un modelo que plasmó el mismísimo Platón en su obra, testigo que tras el ocaso de las civilizaciones grecolatinas recogieron las universidades medievales con el estudio de las conocidas como Siete Artes Liberales. Éstas a su vez se dividieron en dos grupos, las artes del sermón o Trivium y las artes del mundo real o Quadrivium, algo que aún hoy perdura cuando hacemos la (manida y mal utilizada) división entre letras y ciencias. El Trivium abarcaba las ramas propias de la buena comunicación, a saber, la Gramática, la Retórica y la Dialéctica; mientras que el Quadrivium hacía referencia a los saberes de tipo científico conformados por la Aritmética, la Geometría, la Música y la Astronomía.

Imagen 1.- La escuela de Atenas (1509 – 1511), alegoría del pintor italiano Rafael Sanzio.

Debemos tener en cuenta que las Matemáticas griegas aún no habían desarrollado apenas el Álgebra ni otras ramas posteriores y por tanto se reducían casi exclusivamente a un carácter aritmético (la medida) y geométrico (la forma). Además, siguiendo la tradición pitagórica, la idea de número impregnaba la realidad física y estaba detrás de prácticamente cualquier fenómeno. Teniendo en cuenta estas observaciones, alcanzamos a comprender la división de las cuatro disciplinas científicas según una dualidad de lo estático frente a lo dinámico: la Aritmética son los números que cuando se conciben en movimiento generan los fenómenos de la Música, mientras que la Geometría son los cuerpos [en el sentido matemático – geométrico] en reposo que, al considerarse dinámicos, dan lugar a las leyes de la Astronomía.

	Números	Cuerpos
Estático	**Aritmética**	**Geometría**
Dinámico	**Música**	**Astronomía**

En esta Unidad Didáctica nos centramos en el Quadrivium y, más concretamente, en justificar las ideas griegas exhibiendo cómo algunos de los conceptos más elementales de la Música y la Astronomía tienen explicación a través de la Aritmética y la Geometría, respectivamente.

La Aritmética detrás de la Música.

En la música occidental de hoy día predomina el uso de la *escala de temperamento justo* que introdujo el germánico J. S. Bach (1685 – 1750) en su obra "El clave bien temperado" y que fue crucial en el desarrollo de la teoría musical del Barroco. Hasta entonces, los músicos perseguían una división de la escala musical en partes que permitieran construir acordes agradables, pues desde la escuela pitagórica esta división se había realizado según una proporción 3:2, que daba como resultado una división aceptable para una cierta tonalidad pero con armónicos disonantes si se cambiaba de escala. Sin pretender dar aquí una versión rigurosa, ni entrar en tecnicismos musicales, veamos la construcción de la escala pitagórica y la variante propuesta por Bach.

Se dice que ya el mismo Pitágoras se había dado cuenta de que al pulsar una cuerda tensa de doble tamaño que otra, ambas emitían un sonido similar que se acoplaba adecuadamente. Hoy día sabemos que esto ocurre gracias a que una de las ondas que se genera tiene la mitad de longitud (equivalentemente, el doble de frecuencia) que la otra y, por tanto, sus crestas coinciden. **Experimenta este fenómeno** auditivo con objetos que tengan relación 2:1 (por ejemplo con cuerdas, preferiblemente de nylon, o las láminas de una marimba, xilófono o metalófono).

Al intervalo que abarca estos dos sonidos se le conoce como octava y, tradicionalmente, se dividía en siete notas. Seguramente la octava que resulta más familiar es la escala de Do Mayor, o simplemente escala de Do, compuesta por las notas DO – RE – MI – FA – SOL – LA – SI (y que continúa con otro Do, pero una octava más agudo, que aquí denotaremos como DO_8). Tras una evolución de la división anterior, los intervalos de octava quedaron marcados por doce notas separadas cada una de las otras por lo que se conoce como un semitono. Se incluyen las siete notas ya mencionadas junto con bemoles que suben medio tono (resp. sostenidos que lo bajan):

DO – DO# – RE – RE# – MI – FA – FA# – SOL – SOL# – LA – LA# – SI

por lo que las notas de la escala de Do Mayor están separadas por dos semitonos o, lo que es lo mismo, por un tono, a excepción de MI – FA y SI – DO_8 que solo difieren en un semitono.

Un experimento similar al sugerido anteriormente, pero con objetos en proporción 3:2, mostrará que los sonidos simultáneos que se generan también son agradables (de nuevo esto ocurre por la superposición correcta de las ondas de estos sonidos, cuyas crestas coinciden). Por supuesto, puedes obtener la ecuación física del movimiento ondulatorio correspondiente y comprobar que sus longitudes y frecuencias se relacionan en la misma proporción.

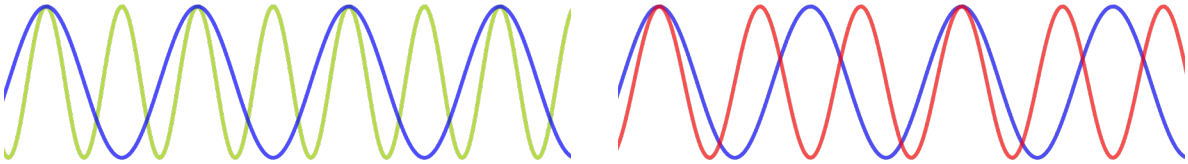

Imagen 2. Dos ondas simples en proporción 2:1 (izquierda) y dos ondas en proporción 3:2 (derecha).

Asumiendo que las proporciones 2:1 y 3:2 son agradables al oído, veamos cómo construir la escala pitagórica. Partiendo de una determinada frecuencia podemos ir obteniendo las demás frecuencias de las doce notas con el siguiente algoritmo:

(1) Sea f la frecuencia del sonido de partida, y por tanto $2f$ la del mismo sonido una octava más agudo. Éstos están en proporción 2:1 y se consideran "el mismo".

(2) Con $\frac{3}{2}f$ obtenemos la frecuencia del siguiente sonido, en proporción 3:2 con el primero.

(3) Repetimos sucesivamente este proceso, de tal forma que $\left(\frac{3}{2}\right)^n f$ nos dará un sonido en proporción 3:2 con el anterior construido. Si en algún momento obtenemos un coeficiente mayor que 2, lo dividimos a la mitad para obtener "el mismo" sonido pero en la octava de referencia, es decir, con una frecuencia reducida al intervalo $[f, 2f]$.

En consecuencia, las frecuencias de las notas musicales en la escala pitagórica quedan codificadas mediante coeficientes del tipo $\frac{3^n}{2^m}$ en función de si para alguno de los valores de n la correspondiente potencia $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ es mayor que 2 y había que dividirla a la mitad. **Elabora la secuencia de factores que resultan** de aplicar sucesivamente los pasos anteriores, ordenándolos después de menor a mayor. Observa que resultan 12 notas al aplicar este proceso ya que la siguiente resultaría tan cercana a la primera que apenas sería distinguible para el oído. Como ya hemos mencionado, en la terminología musical al intervalo $[f, 2f]$ se le conoce como *octava*, mientras que el intervalo $\left[f, \frac{3}{2}f\right]$ se denomina *quinta* y el intervalo entre dos valores consecutivos de esta sucesión es el semitono. En la sucesión ordenada que has realizado antes puedes observar que hay dos amplitudes diferentes (¿podrías determinar cuáles?) para los intervalos de semitono de la construcción pitagórica, lo cual da lugar a disonancias si se consideran acordes de una escala o si quiere hacerse alguna traslación de ésta.

Este inconveniente fue motivo, entre otros, para que Bach buscase una mejor división del intervalo de octava. Recordemos que se buscaba una división del intervalo en doce partes iguales en progresión geométrica (salvo divisiones a la mitad para reducir a la escala primitiva de referencia) y tal que los extremos sean uno doble del otro. Con estas condiciones, **calcula la razón de proporcionalidad** y comprueba que debe ser $\sqrt[12]{2}$. La escala de temperamento justo obtenida por Bach resultó ser una ligera modificación de la pitagórica y el intervalo de quinta apenas fue alterado, ya que $\left(\sqrt[12]{2}\right)^7 \simeq \frac{3}{2}$. Sabiendo que la frecuencia de la nota Do es de 261 hertzios, **calcula las frecuencias del resto de notas** de la escala pitagórica y de la bien temperada. La diferencia entre estas frecuencias las hace casi indistinguibles cuando se escuchan por separado, pero resultan en una combinación desagradable cuando se tocan a la vez.

Podemos ahora **analizar las relaciones existentes entre los diferentes intervalos** con relevancia musical a través de los diferentes tipos de medias. Sean g y h dos valores cualesquiera que, en nuestro caso, serían las frecuencias de notas musicales y que vamos a particularizar en el intervalo de octava. Comprueba que:

a) La media aritmética $m_a = \frac{g+h}{2}$ nos da la frecuencia de quinta.

b) La media armónica $m_h = \frac{2gh}{g+h}$ da como resultado la frecuencia que se conoce como de *cuarta* (¿a qué nota se corresponde?).

c) La media geométrica $m_g = \sqrt{gh}$ relaciona las octavas sucesivas.

d) El cociente entre la media aritmética y la media armónica se corresponde con el intervalo de tono $\frac{m_a}{m_h}$ (¿por qué se llama así?).

Observando que $m_a \cdot m_h = gh$ y escribiendo esta relación de dos formas análogas, obtenemos otras dos propiedades más:

e) De $\frac{g}{m_h} = \frac{m_a}{h}$, deducimos que la proporción entre la frecuencia de una nota con respecto a su cuarta es la misma que la de su quinta con respecto a su octava.

f) De $\frac{g}{m_a} = \frac{m_h}{h}$, deducimos que la proporción entre la frecuencia de una nota con respecto a su quinta es la misma que la de su cuarta con respecto a la de su octava.

La geometría detrás de la astronomía.

Los griegos pensaban que las matemáticas inundaban todos los fenómenos del mundo real, teniendo en cuenta que, como ya hemos mencionado, en aquel período el entendimiento de esta disciplina se reducía a la aritmética y la geometría. Tras ver el ejemplo de cómo las relaciones numéricas aparecen en la música, ahora veremos que tras las primeras ideas de la astronomía subyacen los conceptos geométricos.

Por su sencillez en la definición resultó que la recta, la circunferencia y la esfera ocuparon desde el inicio un lugar preeminente en la geometría y, como tal, los griegos elaboraron sus teorías astronómicas en base a ellos. En particular, imaginaron la Tierra y demás planetas conocidos como esferas que describían movimientos circulares.

En realidad, varios indicios llevaban a pensar que en efecto la Tierra debía tener forma esférica y así lo demostró Eratóstenes en el s. III a. C. (puedes consultar la Unidad Didáctica "Atención planeta Tierra" del proyecto "A la luna y vuelta"). Hoy sabemos que nuestro planeta en realidad tiene forma de esfera achatada por los polos, que recibe el nombre matemático de *elipsoide*. Como puedes imaginar, este elipsoide es el objeto tridimensional que se obtiene al hacer girar una elipse alrededor de uno de sus ejes.

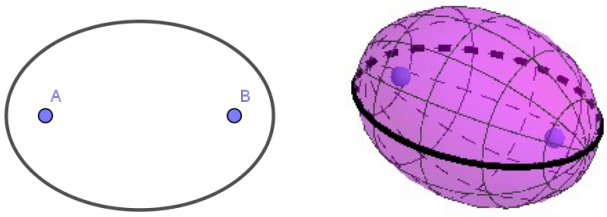

Imagen 3. Elipse de focos A y B (izquierda) y el corrspondiente elipsoide generado (derecha).

Recuerda **cuál es la definición de elipse** como lugar geométrico de puntos del plano **y obtén la ecuación analítica** de una elipse centrada (es decir, que sus ejes coincidan con los ejes coordenados). Los elementos geométricos básicos de la elipse son los focos y los ejes, que se cortan en el centro de la elipse. La intersección de los ejes con la elipse son los vértices y la distancia de éstos al centro determinan la distancia de los semiejes. Llamamos *excentricidad* (denotada por e) de una elipse a la razón entre su semidistancia focal (la mitad de la distancia entre los focos) con respecto a su semieje mayor. Es ahora evidente que una circunferencia puede ser tratada como un caso degenerado de elipse en el que los dos focos coinciden en uno solo, que es el centro, y por tanto su excentricidad es e=0 (puedes intentar **formalizar esta afirmación** utilizando el lenguaje de límites). ¿Cuál crees que es la generalización de la ecuación de la elipse que da como resultado la **ecuación del elipsoide** de revolución?

Hoy en día sabemos que los semiejes mayor y menor terrestres son, respectivamente, de 6378 y 6356 km. La diferencia es tan pequeña que se acepta un modelo esférico con un radio medio de 6371 km, lo que pone en valor la estimación de Eratóstenes de unos 6000 km dada la reducida capacidad técnica de la que disponía en su época.

Algo similar ocurrió al tratar de determinar las trayectorias que seguían los planetas alrededor del sol. El modelo planetario de Ptolomeo era geocentrista y afirmaba que los planetas y demás cuerpos celestes describían trayectorias circulares que, para ajustarse a las disonancias con los datos observables, corrigió a través de la noción de epiciclos. En realidad, estas trayectorias aparentes aparecen en el modelo heliocéntrico como resultado del movimiento de un satélite alrededor de un planeta (por ejemplo la Luna alrededor de la Tierra) combinado con el movimiento del propio planeta alrededor del sol.

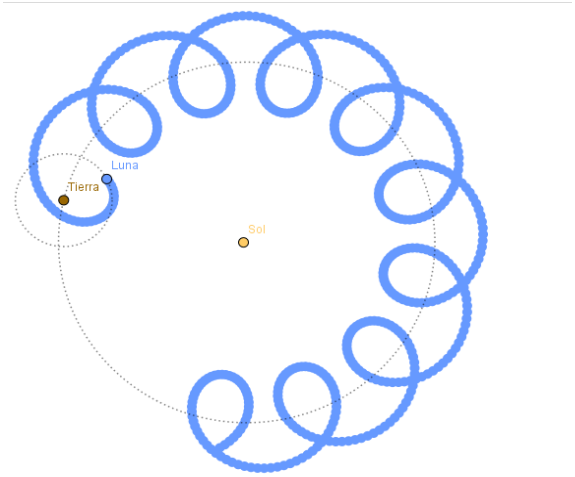

Imagen 4. Trayectoria aparente de la Luna, al combinar dos movimientos circulares.

Pese a que el modelo heliocéntrico ya había sido propuesto por Aristarco en el s. III a. C., éste no se impuso hasta los trabajos de Copérnico en el s. XVI y que fueron apoyados por los descubrimientos de Kepler y Galileo en la primera mitad del s. XVII. En particular, la primera ley de Kepler reza que "los cuerpos celestes siguen trayectorias elípticas alrededor del Sol, estando éste situado en uno de los focos de la elipse". Según los datos de los que disponemos actualmente, la excentricidad de esta trayectoria elíptica terrestre es e=0'0167 lo que en su representación le hace indistinguible al ojo humano de una trayectoria circular (como por ejemplo ocurre en la Imagen 4) cuyo radio medio se establece en unos 149'6 millones de kilómetros. Puedes consultar una versión más extensa de estos hechos en la Unidad "Revoluciones científicas" de Física y Química.

Evolución histórica del Quadrivium. Conclusiones.

Las ideas de una formación integral quedaron reflejadas en las obras de Platón, donde establecía unos preceptos para formar ciudadanos íntegros. En **relación con la teoría del mundo de las ideas** de Platón, observa que aquí se enmarcan las disciplinas que hemos tratado como estáticas mientras que su reflejo en el mundo real son las que hemos tratado como dinámicas. Estas ideas perduran en la filosofía neoplatónica de Proclo, así como en la obra de Boecio.

En las universidades medievales, singularmente con la tradición escolástica, se otorgó un papel relevante a las disciplinas que hemos visto y, junto a las agrupadas en el Trivium, se denominaron como Artes Liberales. La denominación hace referencia a que eran ejercidas por los hombres libres, a diferencia de los oficios o artes manuales desempeñadas por siervos: las primeras ejercitaban la razón mientras que las otras ejercitaban el físico (o, dicho de otra forma, la mente unas y el cuerpo las otras). Lo cual recuerda mucho al "Mens sana in corpore sano", ¿verdad?

Con la llegada del Renacimiento, las universidades y el clero pierden la exclusividad de centros intelectuales de enseñanza, pero perduraron las ideas de necesidad de una formación integral así como la importancia de las Matemáticas como protagonista que explica los fenómenos del mundo.

No hemos hecho otra cosa en esta unidad, en definitiva, que particularizar esta idea mostrando mediante el análisis de dos ejemplos cómo las ideas matemáticas subyacen a otras disciplinas artísticas y de conocimiento humanas, aparentemente alejadas entre sí, como lo son la Música y la Astronomía. Pero... **¿Ves alguna analogía en la evolución vista de Música y Astronomía?**