Estático-dinámico: el Quadrivium, matemáticas en movimiento.

[Reseña con indicaciones para el profesorado]

No pretende ser esta una Unidad Didáctica propiamente de Matemáticas sino que tiene por objetivo exhibir la aplicación de ésta a otras disciplinas: queremos dar una ejemplificación de que las Matemáticas aparecen en (casi) todas partes. A partir del buen manejo que un alumno de Bachillerato debería tener de los conceptos aritméticos y geométricos, utilizaremos algunos de ellos en una somera introducción a la teoría musical así como a algunos hechos astronómicos. La elección de estas temáticas no es casual: son las que conforman el conocido como Quadrivium, según la concepción de números y cuerpos geométricos en una dualidad estática – dinámica:

	Números	Cuerpos
Estático	**Aritmética**	**Geometría**
Dinámico	**Música**	**Astronomía**

Proponemos dedicar dos sesiones a la parte aritmético – musical, en la que se construye la escala pitagórica según la proporción 3:2 y la escala temperada de Bach como resultado de una progresión geométrica. A lo largo de la lectura del documento principal se encuentran las siguientes actividades:

- **Experimenta este fenómeno** auditivo con objetos que tengan relación 2:1. Aunque la experiencia es muy subjetiva, los sonidos así generados deberían resultar agradables al producirse simultáneamente (y lo mismo para objetos en proporción 3:2).
- **Elabora la secuencia de factores que resultan** de aplicar sucesivamente los pasos del algoritmo, ordenándolos después de menor a mayor [tanto esta actividad como la siguiente están inspiradas en un artículo, más extenso, titulado "¿Por qué usamos 12 notas? De Pitágoras a Bach", de Ricardo G. Durán y Bruno Mesz, colaborando con Mariana I. Prieto].

  Estamos construyendo los primeros términos de la sucesión geométrica de razón $\frac{3}{2}$ y para aquellos términos que no están en el intervalo $[1,2]$ debemos dividir entre la correspondiente potencia de 2. Los valores ya ordenados son:

  $$1, \frac{3^7}{2^{11}}, \frac{3^2}{2^3}, \frac{3^9}{2^{14}}, \frac{3^4}{2^6}, \frac{3^{11}}{2^{17}}, \frac{3^6}{2^9}, \frac{3}{2}, \frac{3^8}{2^{12}}, \frac{3^3}{2^4}, \frac{3^{10}}{2^{15}}, \frac{3^5}{2^7}$$

  y puede observarse un patrón de regularidad en la paridad de los exponentes del numerador (notas naturales con exponente par comenzando en Do, notas alteradas con exponente impar comenzando en Sol) y y del denominador (notas naturales con exponente múltiplo de tres comenzando en Do, notas alteradas con residuo uno comenzando en Sol, observar el salto en Do# debido a la reducción a la escala principal de la nota Do_8#).

El siguiente valor de la construcción debería ser $\frac{3^{12}}{2^{18}}$ que excede de 2 y por tanto hay que reducir a la octava de referencia, obteniendo $\frac{3^{12}}{2^{19}} \simeq 1'0136$ que es tan cercano a 1 que su sonido apenas se aprecia diferente al de la frecuencia de partida. A este valor se le conoce como *coma pitagórica.*

Resulta así que, como puede observarse, hay dos tipos de saltos entre los doce valores obtenidos: el semitono grande que es $\frac{3^7}{2^{11}} \simeq 1'0679$ para subir de una nota natural a una alterada, y el semitono pequeño que tiene un valor de $\frac{2^8}{3^5} \simeq 1'0535$ para subir de una nota alterada a una natural. Este último valor puede verse fácilmente como el inverso de $\frac{3^5}{2^8} \simeq 0'9492$ para bajar de la nota natural a la nota alterada.

- **Calcula la razón de proporcionalidad** y comprueba que debe ser $\sqrt[12]{2}$. Sabiendo que la frecuencia de la nota Do es de 261 hertzios, **calcula las frecuencias del resto de notas** de la escala pitagórica y de la bien temperada.

Queremos dividir el intervalo $[1,2]$ en doce partes todas ellas con la misma razón de proporcionalidad. Dicho de otro modo, buscamos la razón r de una progresión geométrica tal que $r^{12}=2$, de donde $r=\sqrt[12]{2}$.

Partiendo de la frecuencia de 261 Hz para la nota Do, basta multiplicarla por los coeficientes obtenidos en el apartado anterior (equivalentemente podemos multiplicar por la razón 3/2 y dividir entre 2 si excedemos la frecuencia de 522 Hz de Do_8) para obtener las frecuencias de la escala pitagórica. Análogamente, podemos multiplicar sucesivamente por $\sqrt[12]{2}$ para obtener las frecuencias en la escala temperada.

Hay que observar que los resultados obtenidos diferirán ligeramente de los reales pues en la teoría musical se fija como referencia la nota La con frecuencia de 440 Hz, lo que da un valor de 261'6256 Hz para la nota Do.

- **Analizar las relaciones existentes entre los diferentes intervalos** con relevancia musical a través de los diferentes tipos de medias [esta actividad es parte del artículo "El fundamento matemático de la escala musical y sus raíces pitagóricas" de Cecilia Tomasini].

a) La media aritmética $m_a = \frac{g+h}{2}$ nos da la frecuencia de quinta, ya que $\frac{f+2f}{2} = \frac{3}{2}f$ (en una quinta hay cinco notas naturales, Do – Re – Mi – Fa – Sol).

b) La media armónica $m_h = \frac{2gh}{g+h}$ da como resultado la frecuencia de cuarta, puesto que $\frac{2 \cdot f \cdot 2f}{f+2f} = \frac{4}{3}f$ que se corresponde con la nota Fa (en una cuarta hay cuatro notas naturales, Do – Re – Mi – Fa).

c) La media geométrica $m_g=\sqrt{gh}$ relaciona las octavas sucesivas. Dos octavas consecutivas están dadas por los intervalos $[f,2f]$ y $[2f,4f]$ resultando que $2f$ es media geométrica del intervalo $[f,4f]$ ya que $\sqrt{f\cdot 4f}=2f$.

d) El cociente entre la media aritmética y la media armónica se corresponde con el intervalo de tono $\frac{m_a}{m_h}$ puesto que, de los apartados anteriores se tiene $\frac{3}{2}f:\frac{4}{3}f=\frac{9}{8}$ y es el coeficiente pitagórico de la nota Re, un tono por encima de la nota Do inicial. Más en general, un tono se compone de dos semitonos. En la escala pitagórica serán un semitono grande y uno pequeño de donde $\frac{3^7}{2^{11}}\cdot\frac{2^8}{3^5}=\frac{3^2}{2^3}=\frac{9}{8}$. Este valor de tono $\frac{9}{8}=1'125$ es muy similar al obtenido para la escala temperada, donde todos los semitonos son idénticos y por tanto el tono es $(\sqrt[12]{2})^2\simeq 1'122$.

La relación $m_a\cdot m_h=gh$ se obtiene inmediatamente de los apartados anteriores ya que $\frac{3}{2}f\cdot\frac{4}{3}f=2f^2=f\cdot 2f$ y basta escribir adecuadamente esta relación en cada caso para obtener las dos últimas relaciones de proporcionalidad indicadas:

e) De $\frac{g}{m_h}=\frac{m_a}{h}$, deducimos que la proporción entre la frecuencia de una nota con respecto a su cuarta es la misma que la de su quinta con respecto a su octava.

f) De $\frac{g}{m_a}=\frac{m_h}{h}$, deducimos que la proporción entre la frecuencia de una nota con respecto a su quinta es la misma que la de su cuarta con respecto a la de su octava.

Recomendamos dedicar una sesión a la lectura de la parte geométrico – astronómica (relacionada con la Unidad "Revoluciones científicas" de Física y Química) y a la realización del ejercicio propuesto, que contiene varios apartados:

- **Cuál es la definición de elipse** como lugar geométrico de puntos del plano **y obtén la ecuación analítica** de una elipse centrada.

  Una elipse se define como el lugar geométrico de los puntos del plano que verifican que la suma de distancias a otros dos puntos fijos, llamados focos, es constante.

  Para obtener la ecuación analítica en coordenadas, llamemos $F=(c,0)$ y $G=(-c,0)$ a los focos, sea $P=(x,y)$ un punto genérico de la elipse y sea d la suma constante de la definición. Utilizando la noción de distancia entre puntos, o equivalentemente el módulo de vectores, la expresión de partida es $\|FP\|+\|GP\|=d$ que, desarrollando pacientemente y teniendo en cuenta que $d=2a$ y que $a^2=b^2+c^2$, permite llegar a la ecuación $\frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}=1$.

Con la notación anterior, la excentricidad es $e=\frac{c}{a}$ y como $0<c<a$, entonces $0<e<1$. Por tanto, la excentricidad de la circunferencia es $\lim_{c\to 0} e=0$. Por otro lado, $\lim_{c\to\infty} e=1$ ya que $a\to\infty$ cuando $c\to\infty$, obteniendo una recta.

Por simple intuición, la ecuación de un elipsoide de revolución es $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (ahora c no representa a la semidistancia focal, sino al tercer semieje del elipsoide).

Finalmente, se puede dedicar una sesión a realizar una breve investigación sobre las Siete Artes Liberales, tanto histórica como artísticamente (por ejemplo, se encuentran representadas en el abovedado de la Real Biblioteca del Monasterio de El Escorial, en Madrid). También pueden acabarse las actividades pendientes de sesiones anteriores y concluir con un breve debate.

- **Relación con la teoría del mundo de las ideas** de Platón. Las matemáticas, más particularmente la Aritmética y la Geometría, pertenecen al plano de las ideas y tienen su reflejo en la Música y la Astronomía, lo que sin duda alude al mito de la caverna y las sombras proyectadas en el mundo sensible. Para el filósofo, el estudio de estas disciplinas serán lo que pueda sacar al individuo del mundo de tinieblas [ignorancia] en el que vive sumido.
- **¿Ves alguna analogía en la evolución vista de Música y Astronomía?** Como conclusión, puede observarse una analogía de corte moralista en la evolución de ambas columnas del Quadrivium. Por el lado numérico, la construcción de la escala pitagórica sigue un modelo considerado de perfección pero en la práctica genera distorsiones al haber dos tipos de semitonos y finalizar la construcción con una aproximación (conocida como la coma pitagórica, mencionada anteriormente) que se corrige en la construcción de Bach mediante una constante de proporcionalidad que es un número irracional. Y por el lado geométrico, los griegos consideraron un modelo basado en la perfección de la circunferencia pero que también tiene distorsiones y que se corrige con las leyes de Kepler mediante una trayectoria elíptica, imperfecta (pese a que ya era conocida por los griegos pues es una de las cónicas, estudiadas por Apolonio).