Materia y antimateria: objetos inversos.

«Dios creó los números naturales, el resto es cosa del hombre»

Leopold Krönecker.

Introducción.

De la física clásica proviene el término materia, y de la física moderna viene el término antimateria. Para conocer el comportamiento de ambas, es necesario adentrarse en el mundo de la física de partículas, pero basta que nos quedemos con una idea principal para comprender por analogía el por qué de las actividades que van a desarrollarse en las páginas venideras.

La idea es la siguiente: Las antipartículas son iguales a sus correspondientes partículas, pero de carga opuesta y, además, una partícula y una antipartícula se aniquilan una a la otra. ¿A qué te suena esto, si en lugar de física de partículas, piensas en números? Es evidente: en los números enteros tenemos tanto números positivos como los correspondientes negativos, que son iguales a los primeros en valor absoluto, pero que al sumarlos entre ellos, se anulan. Recuerda que decimos entonces que son números opuestos, y la diferencia se encuentra en el signo, en analogía con las partículas y antipartículas.

Propiedades aritméticas: estructura algebraica.

En los números reales conoces muy bien, desde hace tiempo, las operaciones de suma y multiplicación (que denotaremos por + y · respectivamente). Además, la resta puede entenderse como una suma que tiene un sumando negativo y la división como una multiplicación por una fracción, por lo que no haremos mención expresa a ellas. Veamos cómo se comportan estas dos operaciones según los subconjuntos numéricos en el que nos encontremos: analiza la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones, dando alguna justificación o ejemplo. Ten en cuenta que en el término número* debes considerar separadamente los casos (1) número natural, (2) número entero, (3) número racional, (4) número real.

(a) La suma de dos números* es también un número*.

(b) La multiplicación de dos números* es también un número*.

En cada conjunto numérico, la respuesta afirmativa a la cuestión anterior quiere decir que la operación (de suma o resta, según el apartado) es cerrada para el correspondiente conjunto. Recordemos ahora una propiedad que conoces sobradamente, la propiedad asociativa tanto de la suma como de la multiplicación: en los conjuntos anteriores, es cierto que $(a+b)+c=a+(b+c)$ y $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$? Observa que, respondiendo afirmativamente, las expresiones sin paréntesis $a+b+c$ y $a\cdot b\cdot c$ dejan de ser ambiguas.

Más cuestiones: ¿existe algún número que, al sumarlo con cualquier otro, el resultado siga siendo igual a este segundo número? ¿existe algún número cuya multiplicación por cualquier otro número deje igual a este segundo número? Por supuesto, estás pensando en el número 0 para la suma y en el número 1 para el producto. Pero, ¿es el 0 un número natural?

Siguiente pregunta: Supón ahora que tienes un número cualquiera, ¿eres capaz de encontrar otro número tal que al sumarlos el resultado sea 0? ¿Y eres capaz de encontrar el número tal que al multiplicarlos el resultado sea 1?

[¡Ojo! En el caso de la multiplicación se prefiere la notación de potencias en lugar de la fracción, es decir, que puesto que el inverso de 7 es la fracción 1/7, se prefiere escribir 7^{-1} para $7 \cdot 7^{-1}=1$.]

Llegamos ya a aquella propiedad recitada respectivamente como "el orden de los sumandos no altera la suma" y "el orden de los factores no altera el producto". En efecto, la propiedad conmutativa asegura que $a+b=b+a$ y que $a \cdot b=b \cdot a$. Y por último, nos queda mencionar la propiedad que relaciona la suma con la multiplicación, que es la propiedad distributiva: $a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c$.

En definitiva, tenemos el siguiente listado de propiedades sobre la operación de suma:

(S1) Asociativa: $(a+b)+c=a+(b+c)$

(S2) Elemento neutro: el 0 cumple que $a+0=0+a=a$.

(S3) Elemento opuesto: para cualquier número a, existe el $-a$ tal que $a+(-a)=0$.

(S4) Conmutativa: $a+b=b+a$.

Mientras que para la operación de multiplicación se cumple

(M1) Asociativa: $(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$

(M2) Elemento neutro: el 1 cumple que $a \cdot 1=1 \cdot a=a$

(M3) Elemento inverso: para cualquier número $a \neq 0$, existe el a^{-1} tal que $a \cdot a^{-1}=a^{-1} \cdot a=1$.

(M4) Conmutativa: $a \cdot b=b \cdot a$

Además, las dos operaciones se relacionan mediante la propiedad distributiva ya mencionada.

Allá donde haya una ley interna en la que se cumplan las propiedades (S1), (S2) y (S3) se dice que el conjunto es un ***grupo***, y si además se cumple (S4) entonces es un grupo conmutativo. Si la hay una segunda operación y se cumplen todas las propiedades listadas, entonces se dice que el conjunto es un ***cuerpo***. En un cuerpo se cumple $a \cdot b=0$ solo cuando alguno de los dos factores es nulo, propiedad que se conoce como no existencia de divisores de cero. Podría parecer algo "evidente", pero después veremos algún ejemplo donde hay multiplicaciones de dos elementos no nulos cuyo producto es cero, y por tanto los conjuntos no serán cuerpos.

Con las preguntas de los párrafos precedentes analizaste los conjuntos numéricos en los que se cumplían las propiedades listadas anteriormente. Resumiendo, deberías poder concluir que:

- En los números naturales **N**, no se cumple la propiedad (S2) pues el 0 no es un número natural. Incluso aunque considerásemos que 0 sí es natural, no se cumple la existencia de opuesto de la propiedad (S3), luego (**N**,+) no es un grupo.
- En los números enteros **Z**, sí se cumplen las propiedades (S1), (S2), (S3) y (S4) por lo que (**Z**,+) es un grupo conmutativo. Lo mismo ocurre para los números racionales **Q** y para los números reales **R**. Sin embargo, para la multiplicación de números enteros no existen los inversos, por lo que (**Z**,+,·) no es un cuerpo.
- Sí existen los elementos inversos para la multiplicación en **Q** y en **R**, y no hay divisores de cero, por lo que (**Q**,+,·) y (**R**,+,·) son cuerpos.

Otros ejemplos: Conjuntos modulares y Matrices.

La aritmética modular es en ocasiones conocida como la aritmética del reloj y la razón es evidente: piensa en los doce números {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11} que pueden representar las horas de un reloj de manijas, en el que las 12 vuelven a ser las 0 (podría pensarse en 24 horas, en lugar de en 12). ¿Qué ocurre cuando, desde las 3, pasan 4 horas? Pues que serán las 7, ¿verdad? Pero, ¿qué ocurre cuando desde las 10, pasan 4 horas? Pues 10+4=14, que son las 2. Esto es sencillo de comprender con la representación circular en la que tras el 11 viene 0=12, 1=13, 2=14, 3=15,… De igual manera podemos concebir atrasar el reloj y antes del 0 estará el 11=–1, 10=–2,… Observa que la clave está en que todas las parejas de números relacionados con la igualdad del reloj tienen una diferencia de 12 unidades. Como vamos a ver a continuación, esta idea puede generalizarse para cualquier cantidad de números enteros.

Elegimos un número m y consideramos el conjunto de los posibles restos al dividir entre él (en el ejemplo del reloj era m=12), por tanto tenemos {0, 1, 2, … m–1}. Ahora los números enteros están relacionados circularmente mediante relaciones como 0=m, 1=m+1,… y por tanto su diferencia será siempre m. De hecho, podemos establecer la relación *“dos números enteros a y b están relaciones módulo m si su diferencia a–b es un múltiplo de m”*. Decimos que los números del conjunto {0, 1, 2, … m–1} son los representantes, y será con los que operemos como referencia para hacer el resultado de una suma o una multiplicación. Practica algunas sumas y multiplicaciones, realizando una tabla de operaciones para valores particulares de m. Por ejemplo, ¿cuál es el resultado de 3+5 módulo m=6? ¿Y si m=8? ¿Y cuánto vale 3·4 módulo m=5? ¿Y si m=6? Una vez hayas manejado las operaciones en el conjunto de restos módulo m, comprueba si se verifican las propiedades de la suma necesarias para que se conviertan en grupo. Analiza en qué casos pueden existir divisores de cero para la multiplicación, y concluye para qué módulos podemos decir que el conjunto de restos es un cuerpo.

Un segundo ejemplo lo obtenemos a partir de las matrices y sus operaciones. Si aún no las conoces puedes pedirle a tu profesor que te haga una breve y sencilla introducción (basta con conocer la definición y cómo realizar sumas y multiplicaciones de matrices). Una vez hayas manejado las operaciones correspondientes, analiza si en las matrices $\mathcal{M}_{mxn}$ de dimensión mxn se cumplen las propiedades de la suma que permiten concluir que este conjunto es un grupo: (S1) si para cualesquiera matrices A, B, C de una dimensión fija se cumplen (A+B)+C=A+(B+C); (S2) si la matriz nula N, llena de ceros, cumple que N+A=A+N=A; (S3) si para una matriz A puedes encontrar otra –A tal que A+(–A)=(–A)+A=N.

Además, aunque en general no es posible en matrices de cualquier orden, comprueba que en las matrices cuadradas $\mathcal{M}_n$ de orden n sí se puede establecer una multiplicación coherente que verifica las propiedades (M1) para matrices A,B, C cuadradas de igual orden (A·B)·C=A·(B·C); (M2) la matriz identidad I con 1's en la diagonal y 0's en el resto de entradas cumple que A·I=I·A=A; (M3) para una matriz A puedes encontrar otra A^{-1} tal que $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$. Esta última propiedad no es fácil de obtener si no conoces el concepto y cálculo de la matriz inversa, aunque puedes plantear un sistema de ecuaciones, solo accesible “a mano” en el caso de n=2.

Sin embargo, el conjunto de matrices no es un cuerpo porque sí hay divisores de cero. Busca un ejemplo de dos matrices cuadradas no nulas cuya multiplicación sea la matriz nula (basta con hacerlo en matrices cuadradas de dimensión 2).

Y un ejemplo sin números: isometrías del plano.

Podría parecer que todos los ejemplos de grupos se obtienen en un contexto numérico. Para alejar esta sospecha, pongamos un ejemplo geométrico. Una isometría del plano es una transformación rígida de éste, es decir, que deje invariantes tanto las distancias como los ángulos. En cursos anteriores has podido estudiarlas, y se clasifican en giros, traslaciones y simetrías con respecto a un eje. Recuerda en qué consisten estos términos y cómo pueden construirse con regla y compás. Para facilitar la visualización, puedes considerarlos aplicados a una figura concreta (un triángulo escaleno, por ejemplo) y ver cuál es el resultado de aplicarle tales isometrías.

Los elementos de nuestro conjunto ahora no son números sino estos movimientos del plano y la operación interna no es una suma sino el movimiento resultante de la concatenación de unos con otros. Analiza algunos casos particulares para entender cómo se comporta la composición de dos isometrías (dos simetrías, dos giros, un giro con una simetría, giros y simetrías compuestos con traslaciones, etc…). Una vez los hayas manejado un poco, podrás convencerte de que se cumplen las propiedades para poder decir que las isometrías son un grupo. ¿Es un grupo conmutativo? ¿O puedes encontrar un ejemplo de dos movimientos que, al aplicarlos en diferente orden, tengan resultado distinto?

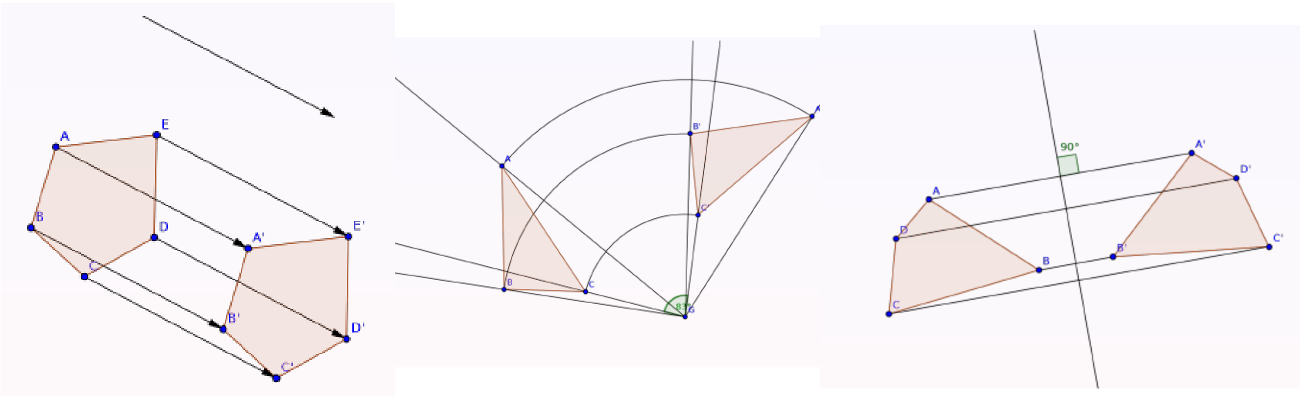

Figura 1.- Traslación, giro y simetría.

Tradicionalmente suele hablarse de algunos movimientos rígidos más, como la simetría con respecto a un punto y las simetrías con deslizamiento. Busca en qué consisten estos dos tipos de isometrías. En realidad, como habrás podido intuir, se obtienen mediante la composición de otras de las vistas anteriormente, ¿cuáles?

De hecho, tanto las traslaciones como los giros pueden conseguirse encadenando dos simetrías, ¿cómo deben hacerse estas simetrías para obtener una traslación o un giro deseado?

Para finalizar, debes saber que aunque es algo más complicado de clasificar, el grupo de isometrías puede extenderse al espacio tridimensional. En particular se puede hablar de simetrías con respecto a planos, que se llaman también especulares por ser las producidas al imaginar el reflejo del objeto con respecto a un plano. Esta idea es importante pues da lugar a la propiedad de quiralidad, de nuevo relacionado con la física de partículas que abrió nuestra propuesta. Indaga sobre el significado de la propiedad de quiralidad en términos geométricos y físicos… ¡y pregunta a tu profesor de Física para profundizar más!