Materia y antimateria: objetos inversos.

[Reseña con indicaciones para el profesorado].

En la presente propuesta didáctica, y en consonancia con lo mencionado en el texto de referencia, presentamos una primera aproximación a las estructuras algebraicas abordando las propiedades que conforman las nociones de grupo y cuerpo. Como ejemplos ilustradores se utilizarán los conjuntos modulares, las matrices y las transformaciones rígidas del plano, además claro está de los conjuntos numéricos habituales.

Aunque esta puerta de entrada nos pueda parecer elemental, las leyes que hay detrás de las operaciones en conjuntos numéricos sirven para que, al generalizarlas, se de lugar a conjuntos con estructuras equivalentes cuyas propiedades merecen ser analizadas. Así que, en realidad, esta puede ser una presentación sobre el objetivo de las Matemáticas modernas, que no es otro que el de analizar y extraer propiedades generales de las relaciones entre objetos independientemente de la naturaleza de dichos objetos.

Como es habitual, recomendamos dedicar al menos tres sesiones a la lectura del documento de referencia para el alumnado a lo largo del cual se pueden desarrollar las actividades de reflexión, demostración e investigación propuestas. También pueden dedicarse algunas sesiones en coordinación con el Departamento de Dibujo para los movimientos del plano y el espacio, así como con Física y Química para profundizar en la importancia de ciertas configuraciones geométricas de la materia.

Durante la primera sesión recomendamos abordar las dos operaciones aritméticas usuales en los conjuntos numéricos.

- Analiza la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones, dando alguna justificación o ejemplo.

  Las suma y la multiplicación son operaciones internas en los conjuntos de números.

- La propiedad asociativa tanto de la suma como de la multiplicación: en los conjuntos anteriores, es cierto que $(a+b)+c=a+(b+c)$ y $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$? Observa que, respondiendo afirmativamente, las expresiones sin paréntesis $a+b+c$ y $a\cdot b\cdot c$ dejan de ser ambiguas.

- ¿Existe algún número que, al sumarlo con cualquier otro, el resultado siga siendo igual a este segundo número? Esta propiedad alude a la llamada existencia de elemento neutro para la suma, e igualmente podemos preguntarnos por la existencia de elemento neutro para la multiplicación. ¿existe algún número cuya multiplicación por cualquier otro número deje igual a este segundo número? Por supuesto, para el elemento neutro de la suma estás pensando en el número 0 y para el elemento neutro de la multiplicación estás pensando en el número 1. Pero, ¿es el 0 un número natural? Se puede presentar aquí la controversia de considerarlo o no como número natural, y enlazar con la teoría de conjuntos y cardinales, axiomas de Peano, etc...

- Supón ahora que tienes un número cualquiera, ¿eres capaz de encontrar otro número tal que al sumarlos el resultado sea 0? ¿Y eres capaz de encontrar el número tal que al multiplicarlos el resultado sea 1?

En el caso de la suma, decimos que buscamos la existencia de elemento opuesto (en referencia al signo) mientras que en el caso de la multiplicación se habla de existencia de elemento inverso. Un par de detalles a tener en cuenta y que cabe mencionar al alumnado: el primero es que podríamos seguir refiriéndonos al inverso como el "opuesto multiplicativo" o viceversa, referirnos formalmente al opuesto como el inverso aditivo, aunque estas terminologías son poco utilizadas para evitar confusiones y se habla de opuesto e inverso en el marco de la suma y la multiplicación respectivamente; en segundo lugar, para la suma el opuesto es denotado con un signo "–" delante, por ejemplo el opuesto del 7 es el -7 ya que 7+(-7)=0, pero en el caso de la multiplicación suele preferirse la notación de potencias en lugar de la fracción, es decir, que puesto que el inverso de 7 es la fracción 1/7, se prefiere escribir 7^{-1} para $7 \cdot 7^{-1}=1$.

Allá donde haya una ley interna en la que se cumplan las propiedades (S1), (S2) y (S3) se dice que el conjunto es un ***grupo***, y si además se cumple (S4) entonces es un grupo conmutativo. Si la hay una segunda operación y se cumplen todas las propiedades listadas, entonces se dice que el conjunto es un ***cuerpo***. En un cuerpo se cumple $a \cdot b=0$ solo cuando alguno de los dos factores es nulo, propiedad que se conoce como no existencia de divisores de cero.

Se puede definir un concepto intermedio entre grupo y cuerpo, algo más sutil y que no utilizaremos aquí, que es el de anillo: si la segunda operación cumple la propiedad (M1) junto con la relación dada por la propiedad distributiva se dice que el conjunto es un *anillo*, si cumple (M2) es un *anillo con unidad* y cumpliendo (M3) tenemos un *anillo de división*, que de hecho se llama *anillo conmutativo* si también cumple (M4). Observa que las propiedades (M1), (M2) y (M3) de la multiplicación son las mismas que (S1), (S2) y (S3) de la suma, pero aplicadas a todos los elementos del conjunto salvo al 0. Los anillos cuyos elementos no nulos tienen todos inverso se conocen como *Dominios de Integridad* y puede demostrarse que no tienen divisores de cero, por lo que en el marco que nos interesa la noción coincide con la ya dada de *cuerpo*.

En la segunda sesión puede elegirse trabajar uno de los dos ejemplos siguientes. La ventaja de los conjuntos modulares es que, siendo sencillos de introducir, pueden trabajarse desde temprano. Si ya se conocen las matrices por estar en segundo curso, puede también desarrollarse la misma secuenciación.

Elegimos un número m y consideramos el conjunto de los posibles restos al dividir entre él (en el ejemplo del reloj es m=12), por tanto tenemos {0, 1, 2, … m–1}. De hecho, podemos establecer la relación *"dos números enteros a y b están relaciones módulo m si su diferencia a–b es un múltiplo de m"*. Decimos que los números del conjunto {0, 1, 2, … m–1} son los representantes, y será con los que operemos como referencia para hacer el resultado de una suma o una multiplicación.

- Practica algunas sumas y multiplicaciones, realizando una tabla de operaciones para valores particulares de m. Por ejemplo, la tabla de la suma y la multiplicación para m=4:

+	0	1	2	3		·	0	1	2	3
0	0	1	2	3		0	0	0	0	0
1	1	2	3	0		1	0	1	2	3
2	2	3	0	1		2	0	2	0	2
3	3	0	1	2		3	0	3	2	1

- Comprueba si se verifican las propiedades de la suma necesarias para que se conviertan en grupo.

  De las propiedades de la suma se desprende que sí, los restos modulares son un grupo.

- Analiza en qué casos pueden existir divisores de cero para la multiplicación, y concluye para qué módulos podemos decir que el conjunto de restos es un cuerpo.

  Hay que distinguir el caso en el que el módulo m es un número primo y el caso en el que no lo es. Si m es primo, entonces no hay divisores de cero y el conjunto de restos modulares es de hecho un cuerpo. Sin embargo, cuando m no es primo podemos encontrar divisores de cero como por ejemplo para m=6, en el que 2·3=6=0.

- Analiza si en las matrices $\mathcal{M}_{mxn}$ de dimensión mxn se cumplen las propiedades de la suma que permiten concluir que este conjunto es un grupo. Comprueba que en las matrices cuadradas $\mathcal{M}_n$ de orden n sí se puede establecer una multiplicación coherente que verifica las propiedades. Busca un ejemplo de dos matrices cuadradas no nulas cuya multiplicación sea la matriz nula.

  De nuevo, las propiedades revelan que las matrices forman un grupo con la suma. Sin embargo, el conjunto de matrices cuadradas no es un cuerpo porque sí hay divisores de cero (los ejemplos son muy sencillos de encontrar en dimensión 2).

La tercera sesión, incluso una cuarta si se realiza alguna actividad en colaboración con otros Departamentos didácticos, se dedica a las isometrías del plano:

- Recuerda en qué consisten estos términos y cómo pueden construirse con regla y compás.

  Las isometrías del plano aparecen como contenido curricular de los cursos de ESO.

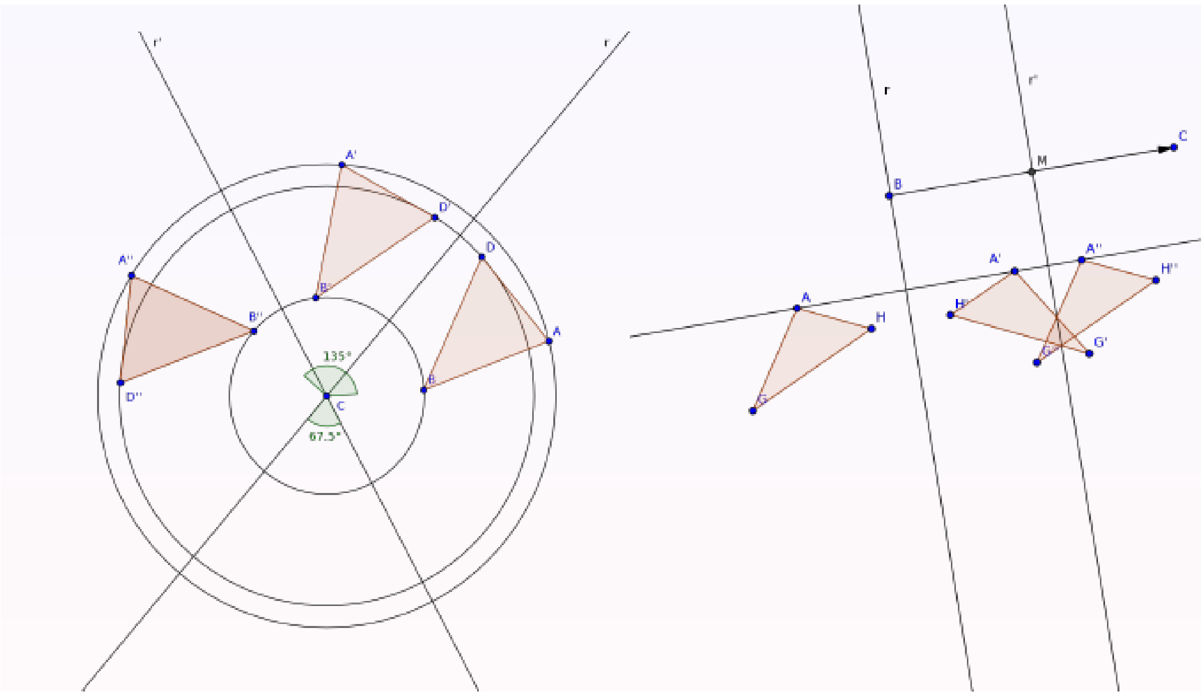
- Analiza algunos casos particulares para entender cómo se comporta la composición de dos isometrías (dos simetrías, dos giros, un giro con una simetría, giros y simetrías compuestos con traslaciones, etc…). Una vez los hayas manejado un poco, podrás convencerte de que se cumplen las propiedades para poder decir que las isometrías son un grupo. ¿Es un grupo conmutativo? ¿O puedes encontrar un ejemplo de dos movimientos que, al aplicarlos en diferente orden, tengan resultado distinto?

  El grupo de isometrías no es conmutativo. Se puede pensar, por ejemplo, en la traslación de vector v=(1,0) y en la simetría con respecto al eje OY. Por ejemplo, el punto (1,0) se trasladaría al (2,0) y quedaría reflejado en el (-2,0), mientras que en el otro orden primero quedaría reflejado en el (-1,0) y después trasladado al (0,0).

- Tanto las traslaciones como los giros pueden conseguirse encadenando dos simetrías, ¿cómo deben hacerse estas simetrías para obtener una traslación o un giro deseado?

  La composición de dos giros es un giro de ángulo la suma, la de dos traslaciones es una traslación de vector la suma de los vectores, etc. Tanto traslación como giro se obtienen como composición de dos simetrías. En el caso del giro, las rectas de simetría se deben cortar en el centro de giro y formar un ángulo mitad del que se quiere girar.

- Indaga sobre el significado de la propiedad de quiralidad en términos geométricos y físicos.


r'
r
A'
D'
D
A''
B''
B'
A
135°
B
D''
C
67.5°
r
r''
C
M
B
A'
A''
H''
A
H
H'
G''
G'
G