# *UD 2.- Percepción relativa del tiempo*
**(GUÍA PARA EL PROFESOR)**

- **Introducción:**

La UD "Percepción relativa del tiempo" es una propuesta de reflexión metacognitiva: sobre los propios procesos de aprendizaje individuales para ponerlos en comparación con los del ser humano. Las actividades de los alumnos están pautadas en cuatro sesiones, habiendo algunas de reflexión y trabajo personal junto a otras de volcado en pequeños o gran grupo.

Esta UD está pensada para ser desarrollada en cualquiera de los cursos de 3º o 4º de la Educación Secundaria Obligatoria, si bien es preferible hacerlo en el último de ellos por la madurez y cantidad de conceptos que se deben recordar de forma simultánea. De hecho, un buen momento para esta reflexión sería el final del curso, tras la finalización del período ordinario y como tarea de ampliación durante el período extraordinario.

La primera sesión pretende poner de manifiesto la dualidad individuo/especie y cómo cada uno de los conceptos se puede entender alcanzado según esta doble mirada. En la segunda sesión se atiende a la adquisición individual de los conceptos, mientras que en la tercera se pretende reconstruir el proceso seguido por el ser humano en su evolución matemática. Por último, la cuarta sesión invita a la comparación entre ambas visiones para reflexionar si la trayectoria individual de cada ser reproduce a pequeña escala la de la humanidad en global.

***Sesión 1.-* Actividad 1.-** Se propone una primera lluvia de ideas sobre conceptos relacionados a los epígrafes propuestos. Los grupos deben apuntarlas en cada uno de ellos y ver cuántos procesos recuerdan en relación a cada uno. Se espera que de los epígrafes numéricos sean capaces de recordar bastantes cosas mientras que de los demás irán encontrando dificultades. La interacción grupal hará aflorar más ideas que la reflexión individual.

**Actividad 2.-** Con el objetivo de crear un primer borrador de línea del tiempo, se propone que el alumno, o los grupos de alumnos, realicen una tentativa de ordenación temporal histórica sin ninguna otra información que su propia experiencia. Es muy probable que la ordenación que sigan sea muy similar a la que se desarrolla en los currículos. En la sesión 3 se desmontará esta falsa concepción.

***Sesión 2.-* Actividad 3.-** A partir de las ideas recopiladas en la sesión 1, cada alumno debe reflexionar primero sobre cuánto tiempo ha invertido a lo largo de su vida en aprender sobre cada uno de los conceptos propuestos. Tras la reflexión, hay que ponderar numéricamente y construir una nube de tags (se puede primero realizar una asignación porcentual y después utilizar alguna herramienta online como https://www.abcya.com/games/word_clouds para generar la nube, aunque también podría realizarse a mano). La imagen visual de la nube debería dar una buena idea del tiempo invertido en cada ítem a lo largo de la vida del alumno.

***Sesión 3.-* Actividad 4.-** En la línea temporal primeramente debe debatirse la escala en la que se debe trabajar. Si se realizan tramos por siglos, los primeros hitos quedarán muy alejados. Si se realizan tramos más grandes serán los últimos avances los que queden excesivamente comprimidos. Se debe aprovechar este debate para retomar los conceptos de escala y, sobre todo, de proporciones.

***Sesión 4.-*** **Actividad 5.-** Por último se propone la comparación de las actividades de la sesión 2 y la sesión 3. Se espera que los alumnos reflexionen sobre el largo proceso hasta llegar a la idea de número en la humanidad, en relación a cómo aprende a contar un niño; la dificultad para dominar el manejo de operaciones con números negativos; en qué momento realizamos el paso a la abstracción algebraica y cómo, a partir de ahí, tanto los individuos como el conjunto de la civilización humana tiende a acelerar en la adquisición de nuevos hitos.

Como puede verse, los ítems propuestos son en realidad hitos del desarrollo matemático. Algunos de ellos, de hecho, íntimamente ligados al momento del desarrollo cognitivo del ser humano y también al ambiente reinante en ciertas épocas. En las actividades cabe una respuesta relativamente abierta, pues en ocasiones no está bien determinado cuándo se alcanzan los éxitos en el manejo y comprensión de cada concepto. A modo de guía, una breve reseña de cada uno de ellos (pueden suprimirse algunos o añadir otros, a voluntad del docente y/o los alumnos).

- *Aprender a contar y tener la idea de "número".*
  Alrededor del 20.000 a.C. el ser humano ya realizaba conteos por asociación "uno a uno". La muestra más antigua conservada es el hueso de Ishango, que tiene muescas que podrían proceder de un conteo. Alrededor del 3000 a.C. la idea de número (en tanto que para mencionar un número no se necesita contar todos los precedentes) parece ya asentada y surgen los primeros sistemas de numeración. El 0 como ente propio no se asentará hasta pasado el s. III d.C.

- *Realizar operaciones aritméticas: suma, resta, multiplicación y división.*
  Las operaciones aritméticas surgen prácticamente al tiempo que se desarrolla la economía de las civilizaciones sumerias, en el año 3000 a.C. El manejo de los números naturales y en especial de los números primos se conocía ya en Grecia. La numeración romana obligaba al uso del ábaco, pero con la introducción de las cifras indo-arábigas (orígenes indios alrededor del 50 a.C.) en Europa alrededor del s.XIII en el Liber Abaci de Fibonacci, se desarrollan los algoritmos de cálculo.

- *Emplear números negativos.*
  Cardano aún los consideraba aún "números falsos" (y eso que ya flotaba en el ambiente la idea de número complejo) y no se aceptan plenamente hasta el s.XVI-XVII. Su dificultad cognitiva radica en representar cantidades que no se corresponen con una realidad palpable, a diferencia de los números naturales.

- *Manejar fracciones (números racionales).*
  Las fracciones ya se utilizaban en civilizaciones babilónicas, aunque preferían el uso de fracciones unitarias (numerador 1) y con denominadores divisores o múltiplos de 60.

- *Utilizar raíces cuadradas (números irracionales).*
  En Babilonia, alrededor del 2000 a.C. ya hay testimonios en tablillas sobre manejo de raíces cuadradas. Los pitagóricos descubrirían la irracionalidad de raíz de dos y raíz de cinco.

- *Cálcular áreas de figuras planas. Teorema de Pitágoras.*
  Alrededor del 2500 a.C. los agrimensores ya utilizaban ángulos rectos y la terna pitagórica 3-4-5 en la arquitectura egipcia es habitual. El Teorema de Pitágoras fue conocido y difundido por éste sobre el s. VI a.C. a raíz de sus viajes de juventud. El cálculo de áreas de polígonos regulares se conoce desde la época griega, aunque para el cálculo general de recintos cerrados no poligonales será necesario esperar al concepto de integral (s. XVII) con algunas excepciones como las lúnulas de Hipócrates o la parábola de Arquímedes. Los Elementos de Euclides (300 a.C.) son la obra cumbre de la Geometría griega.

- *Cálcular volumen de cuerpos tridimensionales.*
  Hay testimonios de que alrededor del 2000 a.C. los egipcios calculaban volúmenes de algunas figuras, incluso, truncadas. Tanto el volumen como el área hacen uso de procesos aproximados de cálculo así como de burdas aproximaciones de pi. Las fórmulas de volumen y área se deben, entre otros, a Eudoxo y el método de exhausción (que en el fondo es un no muy riguroso paso al límite que se justificaría con muchos siglos después).

- *Proporcionalidad de figuras. Teorema de Thales. Trigonometría.*
  La proporcionalidad en términos numéricos está en cierta manera oculta en la teoría de proporciones geométricas atribuida a Eudoxo en el s. IV a. C. y recogida, claro, en Los Elementos de Euclides. El teorema de Thales se le atribuye a éste a raíz de su medida de la altura de la pirámide de Keops, y es un caso particular de proporcionalidad de figuras en el sentido anterior. En cuanto a la trigonometría, el hindú Aryabhata manejaba ya conceptos de seno y coseno.

- *Abstracción y manejo del álgebra.*
  Diofanto escribe "Aritmetica" como el primer tratado que aborda un álgebra abstracta. A la escuela italiana del Renacimiento se les llamó "los cosistas" pues literalmente usaban la palabra "cosa" para denotar una incógnita (es posible que la denominación de x para la variable surja de conservar la palabra xai del árabe al traducir al latín). Aún en el s. XVI se escribía sin una notación contraída, la simbología +, - , =... se debe a Recorde y la notación de potencias y raíces no se consolidaría hasta la obra de Descartes.

- *Resolver ecuaciones de primer y segundo grado.*
  En el papiro Rhind figuran resueltas ecuaciones lineales. En las civilizaciones indias, desde alrededor del 100 a.C. hasta Brahmagupta (alrededor del s. VI-VII) se van sucediendo casos particulares que culimnarán con la obra de Al-Khwarizmi (s. IX) en el que se resuelven todos los tipos de ecuaciones lineales y cuadráticas.

- *Resolver otros tipos de ecuaciones polinómicas.*
  Omar Jayyam (s. XI) trata las ecuaciones cúbicas y Bashkara también algunas particulares de grado cuatro. Ruffini descubre su regla de división investigando sobre la resolución de ecuaciones. Las relaciones de Cardano-Viète permiten obtener tanteos para la regla de Ruffini cuando las soluciones son enteras o racionales. Una fórmula general fue obtenida por Tartaglia para grado 3 y Cardano para grado 4. De grado 5 en adelante no existe una fórmula general (Galois y Abel en el s. XIX).

- *Representación de gráficas de funciones.*
  Aunque el manejo de funciones estaba extendido, no existió una definición formal hasta el s. XVII cuando Descartes, y posteriormente Newton y Leibniz, desarrollaron la el cálculo infinitesimal. La notación f(x) es debida a Euler en el s. XVIII y la definición actual de función es de Dirichlet en el s. XIX. Las funciones lineales y cuadráticas se utilizaron largamente en relación a fenómenos físicos, a partir de la evolución de un fenómeno con respecto a la variable de tiempo, a través de la expresión analítica.

- *Asociar una probabilidad a un suceso aleatorio.*
  Pascal y Fermat hablan en el s. XVII de los primeros conceptos relacionados con la probabilidad a partir del problema de "la partida interrumpida", siendo Huygens el primero al que se le reconoce terminología rigurosamente probabilística. En el s. XVIII Laplace y Bayes formalizarían resultados para sucesos discretos, pero una correcta teoría de la probabilidad en variables continuas debería esperar hasta el s. XIX y el desarrollo de la teoría de la medida.

- *Estadística para obtener información de una población.*
  La estadística surge a finales del s. XVII y principios del s. XVIII en relación a las tasas de mortalidad estudiadas, entre otros, por De Moivre. En realidad la estadística descriptiva se había utilizado siempre, aunque su sistematización en relación a la probabilidad para poder realizar deducciones poblacionales (estadística inferencial) no llegaría hasta el s. XIX.